Chương I. PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC ĐA THỨC

Chuyên đề 1. PHÉP NHÂN CÁC ĐA THỨC

A.Kiến thức cần nhớ

1. Muốn nhân một đơn thức với một đa thức ta nhân đơn thức với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích với nhau.

$$A.\left(B+C\right)=AB+AC$$

2. Muốn nhân một đa thức với một đa thức, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau.

$$\left(A+B\right)\left(C+D\right)=AC+AD+BC+BD$$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Thực hiện phép tính :

$a)A=-\frac{2x}{3}\left(15x-6y\right)$ $\qquad$ $b)B=\left(5x^2-3y\right)\left(4x^2+2y\right)$

Giải

$a)A=-\frac{2x}{3}.15x+\left(-\frac{2x}{3}\right)\left(-6y\right)$ $\qquad$ $b)B=20x^4+10x^2y-12x^2y-6y^2$

$A=-10x^2+4xy$ $\qquad$ $B=20x^4-2x^2y-6y^2$

Ví dụ 2: Tìm giá trị biểu thức sau:

$a)A=\left(5x-7\right)\left(2x+3\right)-\left(7x+2\right)$ tại $x=\frac{1}{2}$

$b)B=\left(x-2\right)\left(y-2x\right)+\left(x+2y\right)\left(y+2x\right)$ tại $x=2;y=-2$

Giải

Tìm cách giải. Nếu thay giá trị của biến vào biểu thức thì ta được số rất phức tạp. Khi thực hiện sẽ gặp khó khăn, dễ dẫn tới sai lầm. Do vậy chúng ta cần thực hiện nhân đa thức với đa thức rồi thu gọn đa thức. Cuối cùng mới thay số.

Trình bày lời giải

a) Ta có:

$$A=\left(5x-7\right)\left(2x+3\right)-\left(7x+2\right)\left(x-4\right)$$

$$=\left(10x^2+15x-14x-21\right)-\left(7x^2-28x+2x-8\right)$$

$$=10x^2+15x-14x-21-7x^2+28x-2x+8$$

$$=3x^2+27x-13$$

Thay $x=\frac{1}{2}$ vào biểu thức, ta có: $A=3.\left(\frac{1}{2}\right)^2+27.\frac{1}{2}-13=\frac{5}{4}$

Vậy với $x = \frac{1}{2}$ thì giá trị biểu thức $A = \frac{5}{4}$

b) Ta có:

$B = (x-2y)(y-2x) + (x+2y)(y+2x)$

$= xy - 2x^2 - 2y^2 + 4xy + xy + 2x^2 + 2y^2 + 4xy$

$= 10xy$

Thay $x = 2; y = -2$ vào biểu thức ta có: $B = 10.2.(-2) = -40$

Vậy với $x = 2; y = -2$ thì giá trị biểu thức $B = -40$

Ví dụ 3: Tìm x, biết:

$a) 4x(x-5) - (x-1)(4x-3) = 23$ $\quad\quad$ $b) (x-5)(x-4) - (x+1)(x-2) = 7$

Giải

Tìm cách giải. Để tìm x, trong vế trái có thực hiện phép nhân đơn thức với đa thức, đa thức với đa thức .Vì vậy ta khai triển và rút gọn vế trái ấy, sau đó tìm x.

Trình bày lời giải

$a) 4x(x-5) - (x-1)(4x-3) = 23$

$4x^2 - 20x - 4x^2 + 3x + 4x - 3 = 23$

$-13x - 3 = 23$

$-13x = 23 + 3$

$x = -2$

$b) (x-5)(x-4) - (x+1)(x-2) = 7$

$x^2 - 4x - 5x + 20 - x^2 + 2x - x + 2 = 7$

$-8x + 22 = 7$

$-8x = -15$

$x = \frac{15}{8}$

Ví dụ 4: Chứng minh giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

$a) A = x(2x+1) - x^2(x+2) + (x^3 - x + 5)$

$b) B = x(3x^2 - x + 5) - (2x^3 + 3x - 16) - x(x^2 - x + 2)$

Giải

Tìm cách giải. Chứng minh giá trị của biểu thức không phụ thuộc vào biến x, tức là sau khi rút gọn kết quả thì biểu thức không chứa biến x. Do vậy để giải bài toán này, chúng ta thực hiện biến đổi nhân đơn thức với đơn thức, nhân đa thức với đa thức và thu gọn kết quả. Nếu kết quả không chứa biến x, suy ra điều phải chứng minh.

Trình bày lời giải

a) Biến đổi biểu thức A, ta có :

$A = x(2x+1) - x^2(x+2) + (x^3 - x + 5)$

$A = 2x^2 + x - x^3 - 2x^2 + x^3 - x + 5$

$A = 6$

Suy ra giá trị của A không phụ thuộc vào x

b) Biến đổi biểu thức B, ta có :

$B = x(3x^2 - x + 5) - (2x^3 + 3x - 16) - x(x^2 - x + 2)$

$B = 3x^3 - x^2 + 5x - 2x^3 - 3x + 16 - x^3 + x^2 - 2x$

$B = 3x^3 - 3x^3 + x^2 - x^2 + 5x - 5x + 16$

$B = 16$

Suy ra giá trị của B không phụ thuộc vào x.

Ví dụ 5: Tính nhanh

$a) A = 4\frac{7}{5741}.\frac{1}{3759} - \frac{4}{3741}.1.\frac{2}{5741} + \frac{1}{3759} + \frac{1}{3759.5741}$

$b) B = 2\frac{1}{3150}.\frac{3}{6547} - \frac{1}{1050}3\frac{6516}{6517} + \frac{4}{1050} - \frac{6}{3150.6517}$

Giải

Tìm cách giải. Quan sát kỹ biểu thức, nếu thực hiện trực tiếp các phép tính bài toán dễ dẫn đến sai lầm; ta nhận thấy nhiều số giống nhau, do vậy chúng ta nghĩ tới đặt phần giống nhau bởi một chữ. Sau đó biến đổi biểu thức chứa chữ đó. Cách giải như vậy gọi là phương pháp đại số

Trình bày lời giải

a) Đặt $x = \frac{1}{5741}; y = \frac{1}{3749}$ khi đó biểu thức có dạng:

$A = (4+7x)y - 4y(1+2x) + y + xy$

$A = 4y + 7xy - 4y - 8xy + y + xy$

$A = y$

$\Rightarrow A = \frac{1}{3759}$

b) Đặt $x = \frac{1}{3150}; y = \frac{1}{6517}$ khi đó biểu thức có dạng:

$B = (2+x)3y - 3x(4-y) + 12x - 6xy$

$B = 6y + 3xy - 12x + 2xy + 12x - 6xy$

$B = 6y$

$\Rightarrow B = 6.\dfrac{1}{6517} = \dfrac{6}{6517}$

C. Bài tập vận dụng

1.1. Rút gọn các biểu thức sau:

$a) A = (4x-1)(3x+1) - 5x(x-3) - (x-4)(x-3)$

$b) B = (5x-2)(x+1) - 3x(x^2 - x - 3) - 2x(x-5)(x-4)$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có:

$A = 12x^2 + 4x - 3x - 1 - 5x^2 + 15x - x^2 + 3x + 4x - 12$

$= 6x^2 + 23x - 13$

b) Ta có:

$B = (5x-2)(x+1) - 3x(x^2 - x - 3) - 2x(x-5)(x-4)$

$= 5x^2 + 5x - 2x - 2 - 3x^3 + 3x^2 + 9x - 2x(x^2 - 5x - 4x + 20)$

$= -3x^3 + 8x^2 + 12x - 2 - 2x^3 + 18x^2 - 40x$

$= -5x^3 + 26x^2 - 28x - 2$

1.2. Viết kết quả phép nhân sau dưới dạng lũy thừa giảm dần của biến x:

$a)(x^2 + x + 1)(x-3)$ $b)(x^2 - 3x + 1)(2 - 4x)$

$c)(x^2 + 3x - 2)(3 + x - 2x)$

Hướng dẫn giải – đáp số

$a)(x^2 + x + 1)(x-3)$

$= x^3 + x^2 + x - 3x^2 - 3x - 3 = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

$b)(x^2 - 3x + 1)(2 - 4x)$

$= 2x^2 - 6x + 2 - 4x^3 + 12x^2 - 4x = -4x^3 + 14x^2 - 10x + 2$

$c)(x^2 + 3x - 2)(3 + x - 2x)$

$= (x^2 + 3x - 2)(3 - x) = 3x^2 + 9x - 6 - x^3 - 3x^2 + 2x$

$= 3x^2 + 9x - 6 - x^3 - 3x^2 + 2x = -x^3 + 11x - 6$

1.3. Chứng minh rằng giá trị biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến x:

$a) C = (5x-2)(x+1) - (x-3)(5x+1) - 17(x+3)$

$b) D = (6x-5)(x+8) - (3x-1)(2x+3) - 9(4x-3)$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có :

$C = 5x^2 + 5x - 2x - 2 - 5x^2 - x + 15x + 3 - 17x - 51$

$\Rightarrow C = -50$

Vậy biểu thức $C = -50$ không phụ thuộc vào x.

$b) D = 6x^2 + 48x - 5x - 40 - 6x^2 - 9x + 2x + 3 - 36x + 27$

$\Rightarrow D = -13$

Vậy giá trị biểu thức $D = -13$ không phụ thuộc vào giá trị của biến x.

1.4. Tìm x, biết :

$a) 5(x-3)(x-7) - (5x+1)(x-2) = 25$

$b) 3(x-7)(x+5) - (x-1)(3x+2) = -13$

Hướng dẫn giải – đáp số

$a) 5x^2 - 35x - 15x + 105 - 5x^2 + 10x - x + 2 = 25$

$-41x + 107 = 25$

$-41x = -82$

$x = 2$

$b) 3x^2 + 15x - 21x - 105 - 3x^2 + 3x + 2 = -13$

$-5x - 103 = -13$

$-5x = 90$

$x = -18$

1.5. Rút gọn và tính giá trị biểu thức:

$a) A = (4-5x)(3x-2) + (3-2x)(x-2)$ tại $x = -2$

$b) B = 5x(x-4y) - 4y(y-5x)$ tại $x = -\dfrac{1}{5}; y = -\dfrac{1}{2}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có :

$A = 12x - 8 - 15x^2 + 10x + 3x - 6 - 2x^2 + 4x$

$= -17x^2 + 29x - 14$

Với $x = -2$, thay vào biểu thức ta có :

$A = -17(-2)^2 + 29(-2) - 14$

$= -68 - 58 - 14$

$= -140$

b) Ta có :

$B = 5x(x-4y) - 4y(y-5x)$

$= 5x^2 - 20xy - 4y^2 + 20xy$

$= 5x^2 - 4y^2$

Thay $x = -\frac{1}{5}; y = -\frac{1}{2}$ vào biểu thức ta có ;

$B = 5\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + 4.\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 5.\frac{1}{25} + 4.\frac{1}{4} = \frac{6}{5}$

1.6. Tính giá trị biểu thức:

$a) A = x^6 - 2021x^5 + 2021x^4 - 2021x^3 + 2021x^2 - 2021x + 2021$ tại $x = 2020$

$b) B = x^{10} + 20x^9 + 20x^8 + ... + 20x^2 + 20x + 20$ với $x = -19$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Với $x = 2020$ nên ta thay $2021 = x + 1$ vào biểu thức , ta có :

$A = x^6 - (x+1)x^5 + (x+1)x^4 - (x+1)x^3 + (x+1)x^2 - (x+1)x + x + 1$

$= x^6 - x^6 - x^5 + x^5 + x^4 - x^4 - x^3 + x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 1 = 1$

b) Với $x = -19$ nên ta thay $20 = -x + 1$ vào biểu thức, ta có :

$B = x^{10} + (-x+1)x^9 + (-x+1)x^8 + ... + (-x+1)x^2 + (-x+1)x + (-x+1)$

$= x^{10} - x^{10} + x^9 - x^9 + x^8 - x^8 + ... + x^2 - x^2 + x - x + 1$

$= 1$

1.7. Tìm các hệ số a, b, c biết:

$a) 2x^2(ax^2 + 2bx + 4c) = 6x^4 - 20x^3 + 8x^2$ đúng với mọi x;

$b) (ax + b)(x^2 - cx + 2) = x^3 + x^2 - 2$ đúng với mọi x.

Hướng dẫn giải – đáp số

$a) 2x^2(ax^2 + 2bx + 4c) = 6x^4 - 20x^3 + 8x^2$

$\Leftrightarrow 2ax^4 + 4bx^3 + 8cx^2 = 6x^4 - 20x^3 + 8x^2 \ (1)$

(1) đúng với mọi x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 6 \\ 4b = -20 \\ 8c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \\ c = 1 \end{cases}$$

$b) (ax + b)(x^2 - cx + 2) = x^3 + x^2 - 2$

$\Leftrightarrow ax^3 + bx^2 - acx^2 - bcx + 2b + 2ax = x^3 + x^2 - 2$

$\Leftrightarrow ax^3 + (b - ac)x^2 + (2a - bc)x + 2b = x^3 + x^2 - 2 \ (2)$

(2) đúng với mọi x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 2b=-2 \\ b-ac=1 \\ 2a-bc=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ -1-1.c=1 \\ 2-(-1)c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-2 \end{cases}$$

1.8. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì:

$A=(2-n)(n^2-3n+1)+n(n^2+12)+8$ chia hết cho 5

Hướng dẫn giải – đáp số

Biến đổi đa thức, ta có :

$A=(2-n)(n^2-3n+1)=n.(n^2+12)+8$

$=2n^2-n^3-6n+3n^2-n+2+n^3+12n+8$

$=5n^2+5n+10 \vdots 5$

1.9. Đặt $2x=a+b+c$. Chứng minh rằng:

$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=ab+bc+ca-x^2$

Hướng dẫn giải – đáp số

Xét vế trái:

$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$

$=x^2-ax-bx+ab+x^2-bx-cx+bc+x^2-ax-cx+ca$

$=ab+bc+ca+3x^2-2x(a+b+c)$

$=ab+bc+ca+3x^2-2x.2x$

$=ab+bc+ca-x^2$

Vế trái bằng vế phải suy ra điều chứng minh.

1.10. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $ab+bc+ca=abc$ và $a+b+c=1$

Chứng minh rằng : $(a-1)(b-1)(c-1)=0$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $(a-1)(b-1)(c-1)=(a-1)(bc-b-c+1)$

$=abc-ab-ac+a-bc+b+c-1$

$=abc-ab-bc-ca+a+b+c-1$

$=abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1$

$=abc-abc+1-1=0$

Chương I. PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC ĐA THỨC

Chuyên đề 2. CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

A. Kiến thức cần nhớ

- $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ (1)
- $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ (2)
- $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ (3)
- $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3B^2A + B^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B)$ (4)
- $(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^3 - B^3 = A^3 - B^3 - 3AB(A-B)$ (5)
- $A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$ (6)
- $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$ (7)

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức :

$a) A = (x+2)^2 + 4(x+2)(x-2) + (x-4)^2$

$b) B = (3x^2 - 2x + 1)(3x^2 + 2x + 1) - (3x^2 + 1)^2$

$c) C = (x^2 - 5x + 2)^2 + 2.(5x-2)(x^2 - 5x + 2) + (5x-2)^2$

Giải

Tìm cách giải. Rút gọn biểu thức là biến đổi viết biểu thức ấy dưới dạng đơn giản hơn. Trong mỗi biểu thức đều ẩn chứa hằng đẳng thức, vì vậy chúng ta dùng hằng đẳng thức để khai triển và thu gọn các đơn thức đồng dạng.

Trình bày lời giải

a) Ta có:

$$A = (x+2)^2 + 4(x+2)(x-2) + (x-4)^2$$
$$= x^2 + 4x + 4 + 4(x^2 - 4) + x^2 - 8x + 16$$
$$= 6x^2 - 4x + 4$$

b) Ta có :

$$B = (3x^2 - 2x + 1)(3x^2 + 2x + 1) - (3x^2 + 1)^2$$
$$= (3x^2 + 1)^2 - (2x)^2 - (3x^2 + 1)^2$$
$$= -(2x)^2 = -4x^2$$

c) Ta có :

$C=\left(x^2-5x+2\right)^2+2.(5x-2)\left(x^2-5x+2\right)+(5x-2)^2$

$=\left[\left(x^2-5x+2\right)+(5x-2)\right]^2$

$=\left(x^2\right)^2=x^4$

Ví dụ 2: Cho $x+y=-7$ và $x^2+y^2=11$. Tính x^3+y^3?

Giải

Tìm cách giải. Sử dụng hằng đẳng thức (1) và giả thiết ta có thể tính được tích xy. Mặt khác phân tích kết luận bằng hằng đẳng thức (4), ta chỉ cần biết thêm tích xy là xong. Từ đó ta có lời giải sau.

Trình bày lời giải

Từ $x+y=-7 \Rightarrow x^2+2xy+y^2=49$

Mà $x^2+y^2=11 \Rightarrow 11+2xy=49 \Rightarrow xy=12$

Ta có : $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=(-7)^3-3.12(-7)$

$\Rightarrow x^3+y^3=-91$

Ví dụ 3: Tính giá trị biểu thức :

$a) A=x^2+10x+26$ tại $x=95$ $\qquad$ $b) B=x^3-3x^2+3x+1$ tại $x=21$

Giải

Tìm cách giải. Quan sát kỹ biểu thức, ta nhận thấy có bóng dáng của hằng đẳng thức. Do vậy chúng ta nên vận dụng đưa về hằng đẳng thức. Sau đó thay số vào để tính, bài toán sẽ đơn giản hơn.

Trình bày lời giải

a) Ta có :

$A=x^2+10x+26$

$=x^2+10x+25+1=(x+5)^2+1$

b) Ta có :

$B=x^3-3x^2+3x+1$

$=x^3-3x^2+3x-1+2$

$=(x-1)^3+2$

Với $x=21 \Rightarrow B=(21-1)^3+2=8000+2=8002$

Ví dụ 4: Tính nhanh:

$a) A=\dfrac{2020^3+1}{2020^2-2019}$ $\qquad$ $b) B=\dfrac{2020^3-1}{2020^2+2021}$

Giải

Tìm cách giải. Quan sat kỹ đề bài, ta nhận thấy mỗi phân số đều ẩn chứa hằng đẳng thức. Do vậy, việc dùng hằng đẳng thức để phân tích ra thừa số là suy luận tự nhiên.

Trình bày lời giải

$$a)A=\frac{2020^3+1}{2020^2-2019}=\frac{(2020+1)\left(2020^2-2020+1\right)}{2020^2-2020+1}=2021$$

$$b)B=\frac{2020^3-1}{2020^2+2021}=\frac{(2020-1)\left(2020^2+2020+1\right)}{2020^2+2020+1}=2019$$

Ví dụ 5: Cho $x-y=2$. Tính giá trị $A=2\left(x^3-y^3\right)-3.(x+y)^2$

Giải

Tìm cách giải. Dựa vào giả thiết và kết luận ta nghĩ tới hai hướng sau:

- Biến đổi biểu thức A nhằm xuất hiện $x-y$ để thay bằng số 2.
- Từ giả thiết, suy ra $x=y+2$ thay vào kết luận, ta được biểu thức chỉ chứa biến y. Sau đó rút gọn biểu thức.

Trình bày lời giải

Cách 1. Ta có :

$$A=2\left(x^3-y^3\right)-3(x+y)^2$$

$$=2(x-y)\left(x^2+y^2+xy\right)-3\left[(x-y)^2+4xy\right]$$

$$=4\left(x^2+y^2-2xy+3xy\right)-3(x-y)^2-12xy$$

$$=4(x-y)^2-3(x-y)^2+12xy-12xy=(x-y)^2=4$$

Cách 2. Từ giả thiết, suy ra $x=y+2$ thay vào biểu thức A ta có :

$$A=2\left((y+2)^3-y^3\right)-3(y+2+y)^2$$

$$=2\left(y^3+6y^2+12y+8-y^3\right)-3(2y+2)^2$$

$$=12y^2+24y+16-12y^2-12y-12=4$$

Ví dụ 6: Tìm các số thực x, y thỏa mãn $x^2+26y^2-10xy+14x-76y+58=0$

Giải

Tìm cách giải. Để tìm số thực x, y thỏa mãn đa thức hai biến bậc hai bằng 0, chúng ta định hướng biến đổi đưa đa thức đó thành tổng bình phương của hai biểu thức. Sau đó áp dụng $A^2+B^2=0$ khi và chỉ khi $A=0$ và $B=0$. Từ đó tìm được x, y.

Trình bày lời giải

Ta có :

$$x^2+26y^2-10xy+14x-76y+58=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-10xy+25y^2+14\left(x-5y\right)+49+y^2-6y+9=0$$

$$\Leftrightarrow (x-5y)^2-14(x-5y)+49+(y-3)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-5y-7\right)^2+\left(y-3\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5y-7=0 \\ y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=22 \\ y=3 \end{cases}$$

Ví dụ 7: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P=x^2+xy+y^2-2x-3y+2015$

Giải

Tìm cách giải. Để tìm giá trị nhỏ nhất của một đa thức bậc hai, chúng ta dùng hằng đẳng thức (1) và (2) để biến đổi đa thức thành tổng các bình phương cộng với một số. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức đạt được khi và chỉ khi tổng các bình phương bằng 0.

Trình bày lời giải

Ta có :

$$P=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}-2x-3y+2015$$

$$=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2-2\left(x+\frac{y}{2}\right)+1+\frac{3y^2}{4}-2y+2014$$

$$=\left(x+\frac{y}{2}-1\right)^2+\frac{3}{4}\left(y^2-\frac{8}{3}y+\frac{16}{9}\right)+2012\frac{2}{3}$$

$$=\left(x+\frac{y}{2}-1\right)^2+\frac{3}{4}\left(y-\frac{4}{3}\right)^2+2012\frac{2}{3}\geq 2012\frac{2}{3}$$

$$=2012\frac{2}{3}\Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{y}{2}-1=0 \\ y-\frac{4}{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P=2012\frac{2}{3}$ khi và chỉ khi $x=\frac{1}{3};y=\frac{4}{3}$

Ví dụ 8: Cho a, b, c thỏa mãn đồng thời $a+b+c=6$ và $a^2+b^2+c^2=12$. Tính giá trị của biểu thức :

$P=\left(a-3\right)^{2020}+\left(b-3\right)^{2020}+\left(c-3\right)^{2020}$

Giải

Tìm cách giải. Giả thiết cho hai hằng đẳng thức mà lại có ba biến a, b, c có vai trò như nhau. Do vậy chúng ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$ và từ giả thiết suy ra $a=b=c=2$. Để tìm ra được kết quả này, chúng ta vận dụng tổng các bình phương bằng 0. Do đó nên bắt đầu từ $\left(a-2\right)^2+\left(b-2\right)^2+\left(c-2\right)^2=0$ và biến đổi tương đương để ra giả thiết. Khi trình bày thì lại bắt đầu từ giả thiết.

Trình bày lời giải

Ta có :

$a^2+b^2+c^2=12 \Rightarrow a^2+b^2+c^2-12=0$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-24+12=0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-4(a+b+c)+12=0$

$\Leftrightarrow a^2-4a+4+b^2-4b+4+c^2-4c+4=0$

$\Leftrightarrow (a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2=0$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=2$

$\Rightarrow P=(-1)^{2020}+(-1)^{2020}+(-1)^{2020}=3$

Ví dụ 9: Cho $a^2-b^2=4c^2$. Chứng minh rằng:

$(5a-3b-8c)(5a-3b+8c)=(3a-5b)^2$

Giải

Tìm cách giải . Quan sát đẳng thức cần chứng minh, chúng ta nhận thấy vế trái có chứa c, vế phải không chứa c. Do vậy chúng ta cần biến đổi vế trái của đẳng thức, sau đó khử c bằng cách thay $4c^2=a^2-b^2$ từ giả thiết. Để thực hiện nhanh và chính xác, chúng ta nhận thấy vế trái có dạng hằng đẳng thức (3).

Trình bày lời giải

Biến đổi vế trái :

$(5a-3b-8c)(5a-3b+8c)$

$=(5a-3b)^2-64c^2=(25a^2-30ab+9b^2)-64c^2$

$=(25a^2-30ab+9b^2)-16(a^2-b^2)(do\ 4c^2=a^2-b^2)$

$=9a^2-30ab+25b^2=(3a-5b)^2$

Vế trái bằng vế phải. Suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 10: Phân tích số 27000001 ra thừa số nguyên tố.

Tính tổng các ước số nguyên tố của nó.

Giải

Tìm cách giải . Chúng ta có thể vận dụng hằng đẳng thức để phân tích một số ra thừa số nguyên tố.

Trình bày lời giải

Ta có:

$27000001=300^3+1=(300+1)(300^2-300+1)$

$301\left[(300+1)^2-30^2\right]=301(300+1-30)(300+1+30)$

$=301.271.331=7.43.271.331$

Tổng các ước số nguyên tố của nó là : $7+43+271+331=652$

Ví dụ 11: Cho các số x, y thỏa mãn đẳng thức $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 4; x^8 + x^4y^4 + y^8 = 8$ hãy tính giá trị biểu thức $A = x^{12} + x^2y^2 + y^{12}$

Giải

Ta có :

$$\left(x^4 + x^2y^2 + y^4\right)\left(x^4 - x^2y^2 + y^4\right) = \left(x^4 + y^4\right)^2 - x^4y^4$$

$$= x^8 + x^4y^4 + y^8 = 8 \Rightarrow x^4 - x^2y^2 + y^4 = 2$$

Kết hợp với giả thiết suy ra $x^4 + y^4 = 3$ và $x^2y^2 = 1$

Ta có : $A = x^{12} + x^2y^2 + y^{12} = \left(x^4\right)^3 + \left(y^4\right)^3 + x^2y^2$

$$= 3\left[\left(x^4 + y^4\right)\left(x^8 - x^4y^4 + y^8\right)\right] + x^2y^2$$

$$= 3\left[\left(x^4 + y^4\right)^2 - 3x^4y^4\right] + 1$$

$$= 3.\left[3^2 - 3\right] + 1 = 19$$

C. Bài tập vận dụng

2.1. Tìm hệ số x^2 của đa thức sau khi khai triển :

$a) A = (x-2)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^3 + (3x+1)^3$

$b) B = (2x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (3x-1)^3$

Hướng dẫn giải – đáp số

$a) A = x^2 - 4x + 4 + x^2 + 4x + 4 + x^3 + 9x^2 + 27x + 27 + 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$

$= 28x^3 + 38x^2 + 36x + 36$

Vậy hệ số của x^2 là 38.

$b) B = 4x^2 - 4x + 1 + x^2 - 4x + 4 + x^3 - 9x^2 + 27x - 27 + 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$

$= 28x^3 - 31x^2 + 28x - 23$

Vậy hệ số của x^2 là -31.

2.2. Tính giá trị biểu thức

$a) A = x^2 + 0,2x + 0,01$ tại $x = 0,9$.

$b) B = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ tại $x = 19$.

$c) C = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$ tại $x^2 - x = 8$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có :

$A = x^2 + 0,2x + 0,01$

$= x^2 + 0,2x + (0,1)^2$

$= (x + 0,1)^2$

Với $x = 0,9 \Rightarrow A = (0,9 + 0,1)^2 = 1$

b) Ta có:

$B = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 1 = (x+1)^3 + 1$

Với $x = 19$ thì $B = (19+1)^3 + 1 = 8000 + 1 = 8001$

c) Ta có :

$C = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$

$= x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x^2 - 2x + 2$

$= (x^2 - x)^2 + 2.(x^2 - x) + 1 + 1$

$= (x^2 - x + 1)^2 + 1$

Với $x^2 - x = 8 \Rightarrow C = (8+1)^2 + 1 = 81 + 1 = 82$.

2.3. Tính hợp lý :

$a) A = \dfrac{356^2 - 144^2}{256^2 - 244^2}$ $\qquad$ $b) B = 253^2 + 94.253 + 47^2$

$c) C = 163^2 - 92.136 + 46^2$ $\qquad$ $d) D = (100^2 + 98^2 + ... + 2^2) - (99^2 + 97^2 + ... + 1^2)$

Hướng dẫn giải – đáp số

$a) A = \dfrac{356^2 - 144^2}{256^2 - 244^2} = \dfrac{(356+144)(356-144)}{(256+244)(256-244)} = \dfrac{500.212}{500.12} = \dfrac{53}{3}$

$b) B = 253^2 + 94.253 + 47^2 = 253^2 + 2.47.253 + 47^2 = (253+47)^2 = 300^2 = 90000$

$c) C = 136^2 - 92.136 + 46^2 = 136^2 - 2.46.136 + 46^2 = (136-46)^2 = 90^2 = 8100$

$d) D = (100^2 + 98^2 + ... + 2^2) - (99^2 + 97^2 + ... + 1^2)$

$= (100^2 - 99^2) + (98^2 - 97^2) + ... + (2^2 - 1^2)$

$= (100-99)(100+99) + (98-97)(98+97) + ... + (2-1)(2+1)$

$= 1.(100+99) + 1.(98+97) + ... + 1.(2+1)$

$= 100 + 99 + ... + 1 = (100+1) + (99+2) + ... + (51+50)$

$= 101 + 101 + ... + 101 = 101.50 = 5050$

2.4. Tính giá trị biểu thức :

$$A=\frac{2021^2\left(2020-2019\right)}{\left(2020-1\right)\left(2020^3+1\right)}.\frac{2019^2\left(2020^2+2021\right)}{2020^3-1}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$A=\frac{2021^2\left(2020^2-2019\right)}{\left(2020^2-1\right)\left(2020^3+1\right)}.\frac{2019^2\left(2020+2021\right)}{2020^3-1}$$

$$=\frac{2021^2\left(2020^2-2020+1\right)}{\left(2020+1\right)\left(2020-1\right)\left(2020+1\right)\left(2020^2-2020+1\right)}.\frac{2019^2\left(2020^2+2020+1\right)}{\left(2020-1\right)\left(2020^2+2020+1\right)}$$

$$=\frac{1}{2019}.2019=1$$

2.5. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$a) A=5x^2+5y^2+8xy+2y-2x+2020$

$b) M=5x^2+y^2+z^2-4x-2xy-z-1$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có :

$$A=4x^2+8xy+4y^2+x^2-2x+1+y^2+2y+1+2018$$

$$=4\left(x+y\right)^2+\left(x-1\right)^2+\left(y+1\right)^2+2018\ge 2018$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $A=2018$ tại $x=1; y=-1$

b) Ta có :

$$B=4x^2+4xy+y^2+x^2-2x+1+y^2+4y+4+2015$$

$$=\left(2x+y\right)^2+\left(x-1\right)^2+\left(y+2\right)^2+2015\ge 2015$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là 2015 tại $x=1; y=-2$.

$$c) M=x^2-2xy+y^2+4x^2-4x+1+z^2-z+\frac{1}{4}-2\frac{1}{4}$$

$$=\left(x+y\right)^2+\left(2x-1\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-2.\frac{1}{4}\ge -2\frac{1}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x-y=0 \\ 2x-1=0 \Rightarrow x=y=z=\frac{1}{2} \\ z-\frac{1}{2}=0 \end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $-2\frac{1}{4}$ khi $x=y=z=\frac{1}{4}$

2.6. Tìm x, biết :

$a)\left(x+2\right)^2+\left(x+3\right)^2-2\left(x-2\right)\left(x-3\right)=19$

$b)\left(x+2\right)\left(x^2-2x+4\right)-x\left(x^2-5\right)=15$

$c)\left(x-1\right)^3+\left(2-x\right)\left(4+2x+x^2\right)+3x\left(x+2\right)=17$

Hướng dẫn giải – đáp số

$a)\left(x+2\right)^2+\left(x+3\right)^2-2.\left(x-2\right)\left(x-3\right)=19$

$\Leftrightarrow \left(x-2\right)^2+8x+\left(x-3\right)^2+12x-2\left(x-2\right)\left(x-3\right)=19$

$\Leftrightarrow 20x+\left[\left(x-2\right)-\left(x-3\right)\right]^2=19$

$\Leftrightarrow 20x+1=19$

$\Leftrightarrow 20x=18 \Leftrightarrow x=\dfrac{9}{10}$

$b)\left(x+2\right)\left(x^2-2x+4\right)-x\left(x^2-5\right)=15$

$\Leftrightarrow x^3+8-x^3+5x=15$

$\Leftrightarrow 5x+8=15 \Leftrightarrow 5x=7 \Leftrightarrow x=\dfrac{7}{5}$

$c)\left(x-1\right)^3+\left(2-x\right)\left(4-2x+x^2\right)+3x\left(x+2\right)=17$

$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^3+8-x^3+3x^2+6x=17$

$\Leftrightarrow x^3-3x^2+3x-1+8-x^3+6x=17$

$\Leftrightarrow 9x+7=17$

$\Leftrightarrow 9x=10 \Leftrightarrow x=\dfrac{10}{9}$

2.7. Biết $xy=11$ và $x^2y+xy^2+x+y=2016$. Hãy tính giá trị : x^2+y^2

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $x^2y+xy^2+x+y=2016$

$xy\left(x+y\right)+x=y=2016$

$11\left(x+y\right)+\left(x+y\right)=2016$

$12\left(x+y\right)=2016 \Rightarrow x+y=168$

Mà $x^2+y^2=\left(x+y\right)^2-2xy=168^2-2.11=28202$

2.8. Cho $a-b=7$. Tính giá trị biểu thức :

$A=a^2\left(a+1\right)-b^2\left(b-1\right)-3ab\left(a-b+1\right)+ab$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có : $A = a^3 + a^2 - b^3 + b^2 - 3ab(a-b) - 3ab + ab$

$= a^3 - 3ab(a-b) - b^3 + a^2 + b^2 - 2ab$

$= (a-b)^3 + (a-b)^2 = 7^3 + 7^2 = 392$

2.9. Chứng minh rằng với mọi x ta có :

$a) x(x-6) + 10 > 0$ $\qquad$ $b) (x-3)(x-5) + 3 > 0$

$c) x^2 + x + 1 > 0$

Hướng dẫn giải – đáp số

$a) x(x-6) + 10 > 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + 1 > 0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + 1 > 0$ (luôn đúng)

$b) (x-3)(x-5) + 3 > 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 18 > 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + 2 > 0$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 + 2 > 0$ (luôn đúng)

$c) x^2 + x + 1 > 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} > 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ (luôn đúng)

2.10. Tìm x, y biết :

$a) x^2 - 2x + 5 + y^2 - 4y = 0$ $\qquad$ $b) 4x^2 + y^2 - 20x - 2y + 26 = 0$

$c) 9x^2 + 4y^2 + 4y - 12x + 5 = 0$

Hướng dẫn giải – đáp số

$a) x^2 - 2x + 5 + y^2 - 4y = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0; (y-2)^2 = 0$ (vì $(x-1)^2, (y-2)^2 \geq 0$)

$\Leftrightarrow x = 1; y = 2$

$b) 4x^2 + y^2 - 20x - 2y + 26 = 0$

$\Leftrightarrow (4x^2 - 20x + 25) + (y^2 - 2y + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (2x-5)^2 + (y-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (2x-5)^2 = 0$ và $(y-1)^2 = 0$ (vì $(2x-5)^2, (y-1)^2 \geq 0$)

$\Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}; y = 1$

$c) 9x^2 + 4y^2 + 4y - 12x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow (9x^2 - 12x + 4) + (4y^2 + 4y + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (3x-2)^2 + (2y+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (3x-2)^2 = 0$ và $(2y+1)^2 = 0$ (vì $(3x-2)^2, (2y+1)^2 \geq 0$)

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}; y = -\dfrac{1}{2}$

2.11. Chứng minh không tồn tại x; y thỏa mãn:

$a) x^2 + 4y^2 + 4x - 4y + 10 = 0$ $\quad$ $b) 3x^2 + y^2 + 10x - 2xy + 29 = 0$

$c) 4x^2 + 2y^2 + 2y - 4xy + 5 = 0$

Hướng dẫn giải – đáp số

$a) x^2 + 4y^2 + 4x - 4y + 10 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + 4y^2 - 4y + 1 + 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (2y-1)^2 + 5 = 0$

Mà $(x+2)^2 + (2y-1)^2 + 5 \geq 5 > 0$

Suy ra không có x, y thỏa mãn đề bài.

$b) 3x^2 + y^2 + 10x - 2xy + 29 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 + 2x^2 + 10x + 29 = 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2 + 2(x+2,5)^2 + 16,5 = 0$

Mà $(x-y)^2 + 2(x+2,5)^2 + 16,5 \geq 16,5 > 0$

Suy ra không có x, y thỏa mãn đề bài.

$c) 4x^2 + 2y^2 + 2y - 4xy + 5 = 0$

$\Leftrightarrow (4x^2 - 4xy + y^2) + (y^2 + 2y + 1) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (2x-y)^2 + (y+1)^2 + 4 = 0$

Mà $(2x-y)^2 + (y+1)^2 + 4 \geq 4 > 0$

Suy ra không có x, y thỏa mãn đề bài.

2.12. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$a)A = 15 - 8x - x^2$ $\qquad$ $b)B = 4x - x^2 + 2$

$c)C = x^2 - y^2 + 4x - 4y + 2$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có : $A = 15 - 8x - x^2 = 31 - \left(16 + 8x + x^2\right) = 31 - \left(4 + x\right)^2 \le 31$

Vậy giá trị lớn nhất của A là 31 khi $x = -4$

b) Ta có $B = 6 - \left(4 - 4x + x^2\right) = 6 - \left(2 - x\right)^2 \le 6$

Vậy giá trị lớn nhất của B là 6 khi $x = 2$

c) Ta có : $C = 10 - \left(x^2 - 4x + 4\right) - \left(y^2 + 4y + 4\right) = 10 - \left(x - 2\right)^2 - \left(y + 2\right)^2 \le 10$

Vậy giá trị lớn nhất của C là 10 khi $x = 2; y = -2$

2.13. Cho các số thực x; y thỏa mãn điều kiện $x + y = 3; x^2 + y^2 = 17$. Tính giá trị biểu thức $x^3 + y^3$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có:

$\left(x + y\right)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 17 + 2xy = 9$

$\Leftrightarrow xy = \dfrac{9 - 17}{2} = -4$

$x^3 + y^3 = \left(x + y\right)^3 - 3xy\left(x + y\right) = 27 - 3.\left(-4\right).3 = 63$

2.14. Cho $x + y = a + b\left(1\right)$ và $x^3 + y^3 = a^3 + b^3\left(2\right)$

Chứng minh rằng : $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có hằng đẳng thức : $\left(x + y\right)^3 = x^3 + y^3 + 3xy\left(x + y\right)$ $\qquad$ (1)

$\left(a + b\right)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\left(a + b\right)$ $\qquad$ (2)

Kết hợp với (1) và (2) suy ra $xy = ab$ $\qquad$ (3)

Mặt khác, từ (1) suy ra $\left(x + y\right)^2 = \left(a + b\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy = a^2 + b^2 + 2ab$

Kết hợp với (3) suy ra : $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

2.15. Cho $a + b + c = 2p$. Chứng minh rằng:

$a)2bc + b^2 + c^2 - a^2 = 4p\left(p - a\right)$

$b)\left(p - a\right)^2 + \left(p - b\right)^2 + \left(p - c\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - p^2$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có: $2bc+b^2+c^2-a^2=(b+c)^2-a^2$

$$=(b+c+a)(b+c-a)=2p(2p-a)=4p(p-a)$$

Vế trái bằng vế phải. Điều phải chứng minh

b) Ta có : $(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2$

$$=p^2-2ap+a^2+p^2-2pb+b^2+p^2-2pc+c^2$$

$$=3p^2-2p(a+b+c)+a^2+b^2+c^2$$

$$=3p^2-2p.2p+a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2-p^2$$

Vế trái bằng vế phải. Điều phải chứng minh

2.16. Cho $A=\underbrace{99...9}_{2020\text{ chữ số }9}$ .Hãy so sánh tổng các chữ số của A^2 với tổng các chữ số của A.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có :

$A=\underbrace{99...9}_{2020\text{ chữ số }9}=10^{2020}-1$ nên $A^2=\left(10^{2020}-1\right)^2$

$$=10^{4040}-2.10^{2020}+1=\underbrace{99...98}_{2019}\underbrace{00...01}_{2019}$$

Tổng các chữ số của A^2 là : $9\times 2019+8+1=18180$

Tổng các chữ số của A là : $9\times 2020=18180$

Vậy tổng các chữ số của A^2 và tổng các chữ số của A bằng nhau.

2.17. Chứng minh rằng:

Nếu $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=(a+b-2c)^2+(b+c-2a)^2+(c+a-2b)^2$

thì $a=b=c$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ giả thiết ta có :

$$(a+b-2c)^2-(a-b)^2+(b+c-2a)^2-(b-c)^2+(c+a-2b)^2-(c-a)^2=0(*)$$

Áp dụng hằng đẳng thức : $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ ta có :

$$(a+b-2c)^2-(a-b)^2=(2a-2c)(2b-2c)=4(a-c)(b-c)$$

$$(b+c-2a)^2-(b-c)^2=(2b-2a)(2c-2a)=4(b-a)(c-a)$$

$$(c+a-2b)^2-(c-a)^2=(2c-2b)(2a-2b)=4(c-b)(a-b)$$

Kết hợp với (*) ta có :

$$4(a-c)(b-c)+4(b-a)(c-a)+4(c-b)(a-b)=0$$

$\Leftrightarrow (a-c)(b-c)+(b-a)(c-a)+(c-b)(a-b)=0$

$\Leftrightarrow ab-ac-bc+c^2+bc-ba-ac+a^2+ac-bc-ab+b^2=0$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=0$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac=0$

$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2=0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\begin{cases} a-b=0 \\ b-c=0 \Leftrightarrow a=b=c \\ c-a=0 \end{cases}$

2.18. Cho n là số tự nhiên lớn hơn 1. Chứng minh rằng n^4+4^n là hợp số

(Thi học sinh giỏi toán 9, tỉnh Quảng Bình, năm học 2012-2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

- Với n là số chẵn $\Rightarrow n=2k\left(k\in N^+\right)$ thì $n^4+4^n=16k^4+4^{2k} \vdots 4$ nên n^4+4^n là hợp số

- Với n là số lẻ. Đặt $n=2k-1\left(k\in N^*, k>1\right)$ thì ta có:

$n^4+4^n=n^4+2.n^2.2^n+4^n-n^2.2^{n+1}$

$=\left(n^2+2^n\right)^2-n^2.2^{2k}=\left(n^2+2^n-2^k.n\right)\left(n^2+2^n+2^k.n\right)$

Ta có:

$n^2+2^n-2^k.n=n^2-2^k.n+2^{2k-2}+2^n-2^{2k-2}=\left(n-2^{k-1}\right)^2+2^{2k-1}-2^{2k-2}$

$=\left(n-2^{k-1}\right)^2+2^{2k-2}>1$

mà $n^2+2^n+2^k.n>n^2+2^n-2^k.n$ suy ra n^4+4^n là hợp số

Vậy n^4+4^n là hợp số với n là số tự nhiên lớn hơn 1.

2.19.

a) Cho $a+b=2$.Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=a^2+b^2$

b) Cho $x+2y=8$.Tìm giá trị lớn nhất của $B=xy$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có: $(a+b)^2+(a-b)^2=2\left(a^2+b^2\right)$

$\Rightarrow 4+(a-b)^2=2A$

$\Rightarrow 4\le 2A \Rightarrow A\ge 2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2 khi $a=b=1$

b) Từ $x+2y=8\Rightarrow x=8-2y$ suy ra

$B=\left(8-2y\right)y=8y-2y^2=8-8+8y-2y^2$

$B=8-2\left(2-y\right)^2\le 8$

Vậy giá trị lớn nhất của B là 8 khi $y=2;x=4$

2.20. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=3\left(x^2+y^2\right)$ biết $x^2+y^2=xy+12$

(Tuyển sinh vào lớp 10, THPT chuyên Bình Dương, năm học 2014-2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ giả thiết, ta có $\left(x+y\right)^2=3xy+12\Leftrightarrow 6xy=2\left(x+y\right)^2-24$

Ta có :

$A=3\left(x^2+y^2\right)=3\left(x+y\right)^2-6xy=3\left(x+y\right)^2-2\left(x+y\right)^2+24=\left(x+y\right)^2+24$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 24 khi $x+y=0\Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=-2\end{cases};\begin{cases}x=-2\\y=2\end{cases}$

2.21. Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn: $\left(a-b\right)^3+\left(b-c\right)^3+\left(c-a\right)^3=2010$.Tính giá trị của biểu thức $A=\left|a-b\right|+\left|b-c\right|+\left|c-a\right|$

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $a-b=x;b-c=y;c-a=z\Rightarrow x+y+z=0\Rightarrow z=-\left(x+y\right)$

Ta có : $x^3+y^3+z^3=210\Leftrightarrow x^3+y^3-\left(x+y\right)^3=210\Leftrightarrow -3xy\left(x+y\right)=210$

$\Leftrightarrow xyz=70$. Do x, y, z là số nguyên có tổng bằng 0 và $xyz=70=\left(-2\right)\left(-5\right).7$

nên $x,y,z\in\left\{-2;-5;7\right\}\Rightarrow A=\left|a-b\right|+\left|b-c\right|+\left|c-a\right|=14$

2.22. Chứng minh không tồn tại hai số nguyên x, y thỏa mãn $x^2-y^2=2020$

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ $x^2-y^2=2020$ suy ra x; y cùng chẵn hoặc cùng lẻ

TH1: Nếu x; y cùng chẵn. Đặt $x=2m;y=2n$

$4m^2-4n^2=2018\Rightarrow 2m^2-2n^2=1009$

Vế trái chẵn, còn vế phải lẻ. Vô lí

TH2: Xét x; y cùng lẻ. Đặt $x=2k+1;y=2q+1$

Ta có : $\left(2m+1\right)^2-\left(2n+1\right)^2=2018\Leftrightarrow 4m^2+4m-4n^2-4n=2018$

Vế trái chia hết cho 4, vế phải không chia hết cho 4, vô lí

Vậy không tồn tại số nguyên x; y thỏa mãn $x^2-y^2=2020$.

Chương I. PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC ĐA THỨC

Chuyên đề 3. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Phân tích đa thức thành nhân tử (hay thừa số) là biến đổi đa thức đó thành một tích của các đa thức khác.

2. Các phương pháp thường dùng:

- Đặt nhân tử chung
- Dùng hằng đẳng thức
- Nhóm các hạng tử
- Phối hợp nhiều phương pháp. Có khi ta phải dùng những phương pháp đặt biệt khác (xem chuyên đề 6)

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

$a) 12x^3y - 6x^2y + 3x^2y^2$ $\qquad$ $b) 5x^2y(x-7) - 5xy(7-x)$

Giải

Tìm cách giải. Quan sát đề bài, chúng ta thấy các đa thức trên đều có nhân tử chung

Bước 1. Chọn hệ số là ƯCLN của các hệ số.

Bước 2. Phần biến gồm tất cả các biến chung, mỗi biến lấy với số mũ nhỏ nhất của nó trong các hạng tử. Nếu trong đó có hai nhân tử đối nhau, chúng ta đổi dấu một trong hai nhân tử và dấu đứng trước nó.

Trình bày lời giải.

$a) 12x^3y - 6x^2y + 3x^2y^2 = 3x^2y^2(4x - 2 + y)$

$b) 5x^2y(x-7) - 5xy(7-x) = 5x^2y(x-7) + 5xy(x-7) = 5xy(x-7)(x+1)$

Ví dụ 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$a) 100x^2 - 9y^2$ $\qquad$ $b) 9(a+b)^2 - 4(a-2b)^2$

$c) 8x^3 + 27y^3$ $\qquad$ $d) 125 - 75x + 9x^2 - x^3$

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy trong ví dụ này mỗi đa thức đều có dạng hằng đẳng thức. Do vậy chúng ta vận dụng hằng đẳng thức để phân tích đa thức thành nhân tử.

Trình bày lời giải

$a) 100x^2 - 9y^2 = (10x - 3y)(10x + 3y)$

$b) 9(a+b)^2 - 4(a-2b)^2$

$= [3(a+b) - 2(a-2b)][3(a+b) + 2(a-2b)] = (a-7b)(5a-b)$

$c) 8x^3 + 27y^3 = (2x+3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$

$d) 125 - 75x + 15x^2 - x^3 = (5-x)^3$

Ví dụ 3: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$a) x(a+b)+a+b$

$b) 3a^2x-3a^2y+abx-aby$

$c) ax+bx+cx+2a+2b+2c$

Giải

Tìm cách giải. Mỗi đa thức trên không có nhân tử chung, không xuất hiện hằng đẳng thức. Quan sát kỹ nhận thấy nếu nhóm các hạng tử thích hợp thì xuất hiện nhân tử chung.

Trình bày lời giải

$a) x(a+b)+a+b=(a+b)(x+1)$

$b) 3a^2x-3a^2y+abx-aby=3a^2(x-y)+ab(x-y)=a(x-y)(3a+b)$

$c) ax+bx+cx+2a+2b+2c=x(a+b+c)+2(a+b+c)=(x+2)(a+b+c)$

Ví dụ 4: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$a) a^2-b^2-4a+4b$

$b) (xy+4)^2-(2x+2y)^2$

$c) \left(a^2+b^2+ab\right)^2-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2$

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy mỗi đa thức đều ẩn chứa trong đó hằng đẳng thức.

Vậy chúng ta có thể nhóm nhằm xuất hiện hằng đẳng thức

Trình bày lời giải

$a) (a-b)(a+b)-4(a-b)=(a-b)(a+b-4)$

$b) (xy+4+2x+2y)(xy+4-2x-2y)$

$=\left(x(y+2)+2(y+2)\right)\left(x(y-2)-2(y-2)\right)$

$=(x+2)(y+2)(x-2)(y-2)$

$c) \left(a^2+b^2+ab-ab\right)\left(a^2+b^2+ab+ab\right)-c^2\left(a^2+b^2\right)$

$=\left(a^2+b^2\right)(a+b)^2-c^2\left(a^2+b^2\right)$

$=\left(a^2+b^2\right)\left[(a+b)^2-c^2\right]=\left(a^2+b^2\right)(a+b+c)(a+b-c)$

Ví dụ 5: Cho các số thực a, b, c đôi một phân biệt và thỏa mãn

$a^2(b+c)=b^2(c+a)=2012$

Tính giá trị biểu thức $M=c^2(a+b)$

(Tuyển sinh 10, trường THPT chuyên trường ĐHSP Hà Nội, năm học 2012-2013)

Giải

Tìm cách giải. Từ giả thiết chúng ta không thể tính giá trị cụ thể của a, b, c. Do vậy bằng việc quan sát và nghĩ tới việc phân tích đa thức thành nhân tử để tìm mối quan hệ giữa a, b và c. Từ đó tìm được giá trị biểu thức M.

Trình bày lời giải

Ta có :

$a^2(b+c)=b^2(c+a) \Leftrightarrow a^2b+a^2c-b^2c-b^2a=0$

$\Leftrightarrow ab(a-b)+c(a^2-b^2)=0$

$\Leftrightarrow (a-b)(ab+bc+ca)=0$

Vì $a \neq b$ nên:

$\Rightarrow ab+bc+ca=0$

$\Rightarrow (b-c)(ab+bc+ca)=0 \Rightarrow b^2a+b^2c-bc^2-ac^2$

$\Rightarrow b^2a+b^2c=bc^2+ac^2 \Rightarrow c^2(a+b)=b^2(a+c)$

Vậy $M=2012$

C. Bài tập vận dụng

3.1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$a)ab(x-2)-a^2(x-2)$ $\qquad$ $b)4x^3y^2-8x^2y^3+12x^3y$

Hướng dẫn giải – đáp số

$a)ab(x-2)-a^2(x-2)=a(x-2)(a+b)$

$b)4x^3y^2-8x^2y^3+12x^3y=4x^2y(xy-2y^2+3x)$

3.2. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$a)(xy+1)^2-(x+y)^2$ $\qquad$ $b)(a+b+c)^2+(a+b-c)^2-4c^2$

$c)(a^2+9)^2-36a^2$

Hướng dẫn giải – đáp số

$a)(xy+1)^2-(x+y)^2=(xy+1-x-y)(xy+1+x+y)$

$=[x(y-1)+1-y][x(y+1)+y+1]$

$=(x-1)(y-1)(x+1)(y+1)$

$b)(a+b+c)^2+(a+b-c+2c)(a+b-c-2c)$

$=(a+b+c)^2+(a+b+c)(a+b-3c)$

$=(a+b+c)(a+b+c+a+b-3c)$

$= (a+b+c)(2a+2b-2c) = 2(a+b+c)(a+b-c)$

$c) (a^2+9)^2 - 36a^2 = (a^2+9-6a)(a^2+9+6a) = (a-3)^2(a+3)^2$

3.3. Phân tích đa thức sau thành nhân tử :

$a) 3a-3b+a^2-2ab+b^2$ $\qquad$ $b) a^2+2ab+b^2-2a-2b+1$

$c) 4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$

Hướng dẫn giải – đáp số

$a) 3(a-b)+(a-b)^2 = (a-b)(3+a-b)$

$b) (a+b)^2 - 2(a+b)+1 = (a+b-1)^2$

$c) (2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)$

$= \left[(b+c)^2 - a^2\right]\left[a^2-(b-c)^2\right]$

$= (b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)$

3.4. Phân tích đa thức sau thành nhân tử :

$a) x^2-4xy+4y^2-9a^2$ $\qquad$ $b) xy(a^2+b^2)-ab(x^2+y^2)$

$c) x^2(a-b)-2xy(a-b)+ay^2-by^2$ $\qquad$ $d) 8xy^3-x(x-y)^3$

Hướng dẫn giải – đáp số

$a) x^2-4xy+4y^2-9a^2 = (x-2)^2-(3a)^2 = (x-2-3a)(x-2+3a)$

$b) xy(a^2+b^2)-ab(x^2+y^2) = xya^2+xyb^2-abx^2-aby^2$

$= (xya^2-abx^2)+(xyb^2-aby^2)$

$= ax(ay-bx)+by(bx-ay) = (ay-bx)(ax-by)$

$c) x^2(a-b)-2xy(a-b)+ay^2-by^2 = x^2(a-b)-2xy(a-b)+y^2(a-b)$

$= (a-b)(x^2-2xy+y^2) = (a-b)(x-y)^2$

$d) 8xy^3-x(x-y)^3 = x\left[(2y)^3-(x-y)^3\right]$

$= x(2y-x+y)\left[4y^2+2y(x-y)+(x-y)^2\right] = x(3y-x)(x^2+3y^2)$

3.5. Phân tích đa thức sau thành nhân tử :

$a) A = x^2-4x^2y^2+y^2+2xy$ $\qquad$ $b) B = x^6-y^6$

$c) C = 4xy(x^2+y^2)-6(x^3+y^3+x^2y+xy^2)+9(x^2+y^2)$

$d) D = 25-a^2+2ab-b^2$

Hướng dẫn giải – đáp số

$a) A = x^2 + 2xy + y^2 - 4x^2y^2 = (x+y)^2 - 4x^2y^2$

$= (x + y - 2xy)(x + y + 2xy)$

$b) B = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$c) C = 4xy(x^2 + y^2) - 6(x^2 + y^2)(x + y) + 9(x^2 + y^2)$

$= (x^2 + y^2)(4xy - 6x - 6y + 9)$

$= (x^2 + y^2)[2x(2y - 3) - 3(2y - 3)]$

$= (x^2 + y^2)(2x - 3)(2y - 3)$

$d) D = 25 - (a^2 - 2ab + b^2) = 25 - (a - b)^2$

$= (5 + a - b)(5 - a + b)$

3.6. Phân tích đa thức thành nhân tử :

$a) x^3 + 3x^2y - 4xy^2 - 12y^3$ $\qquad$ $b) x^3 + 4y^2 - 2xy + x^2 + 8y^3$

$c) 3x^2(a - b + c) + 36xy(a - b + c) + 108y^2(a - b + c)$

$d) a(x^2 + 1) - x(a^2 + 1)$

Hướng dẫn giải – đáp số

$a) x^3 + 3x^2y - 4xy^2 - 12y^3$

$= x^2(x + 3y) - 4y^2(x + 3y)$

$= (x - 2y)(x + 2y)(x + 3y)$

$b) x^3 + 8y^3 + x^2 - 2xy + 4y^2$

$= (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) + (x^2 - 2xy + 4y^2)$

$= (x + 2y + 1)(x^2 - 2xy + 4y^2)$

$c) 3(a - b + c)(x^2 + 12xy + 36y^2)$

$= 3(a - b + c)(x + 6y)^2$

$d) ax^2 + a - xa^2 - x$

$= ax(x - a) - (x - a)$

$= (x - a)(ax - 1)$

3.7. Phân tích đa thức thành nhân tử :

$a)x^3-1+5x^2-5+3x-3$ $\qquad$ $b)a^5+a^4+a^3+a^2+a+1$

$c)x^3-3x^2+3x-1y^3$ $\qquad$ $d)5x^3-3x^2y-45xy^2+27y^3$

Hướng dẫn giải – đáp số

$a)(x-1)(x^2+x+1)+5(x-1)(x+1)+3(x-1)$

$=(x-1)(x^2+x+1+5x+5+3)$

$=(x-1)(x^2+6x+9)$

$=(x-1)(x+3)^2$

$b)a^3(a^2+a+1)+(a^2+a+1)$

$=(a^2+a+1)(a^3+1)$

$=(a^2+a+1)(a+1)(a^2-a+1)$

$c)(x-1)^3-y^3=(x-1-y)\left[(x-1)^2+(x-1)y+y^2\right]$

$=(x-y-1)(x^2-2x+1+xy-y+y^2)$

$d)x^2(5x-3y)-9y^2(5x-3y)$

$=(5x-3y)(x^2-9y^2)$

$=(5x-3y)(x-3y)(x+3y)$

3.8. Phân tích đa thức thành nhân tử :

$a)x^3-x^2-x+1$ $\qquad$ $b)x^4-x^2+2x-1$

$c)4a^2b^2-(a^2+b^2-1)^2$

Hướng dẫn giải – đáp số

$a)x^2(x-1)-(x-1)=(x-1)(x^2-1)+(x-1)^2(x+1)$

$b)x^4-(x-1)^2=(x^2-x+1)(x^2+x-1)$

$c)(2ab+a^2+b^2-1)(2ab-a^2-b^2+1)$

$=\left[(a+b)^2-1\right]\left[1-(a-b)^2\right]$

$=(a+b+1)(a+b-1)(1+a-b)(1-a+b)$

3.9. Cho x, y, z là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác

Đặt $A=4x^2y^2-(x^2+y^2-z^2)^2$.Chứng minh rằng $A>0$

Hướng dẫn giải – đáp số

Dùng hằng đẳng thức đáng nhớ, phân tích A thành nhân tử, ta được :

$$A=\left(2xy+x^2+y^2-z^2\right)\left(2xy-x^2-y^2+z^2\right)$$

$$=\left[\left(x+y\right)^2-z^2\right]\left[z^2-\left(x-y\right)^2\right]=\left(x+y+z\right)\left(x+y-z\right)\left(z+x-y\right)\left(y+z-x\right)$$

Do x, y, z là 3 cạnh của 1 tam giác, suy ra :

$$x+y+z>0, x+y-z>0, z+x-y>0, y+z-z>0 \Rightarrow A>0$$

3.10. Cho các số a, b lần lượt thỏa mãn các hệ thức : $\begin{cases} a^3-3a^2+5a-17=0 \\ b^3-3b^2+5b+11=0 \end{cases}$

Tính $a+b$

Hướng dẫn giải – đáp số

Cộng vế theo vế của hai hằng đẳng thức ta được :

$$a^3-3a^2+5a-17+b^3-3b^2+5b+11=0$$

$$\Leftrightarrow a^3-3a^2+3a-1+b^3-3b^2+3b-1+2\left(a=b-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(a-1\right)^3+\left(b-1\right)^3+2\left(a-1=b-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(a+b-2\right)\left(a^2+a+1+b^2+b+1+2\right)=0$$

Vì $a^2+a+1+b^2+b+1+2=\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{2}\right)^2+3\dfrac{1}{2}>0 \Rightarrow a+b=2$

3.11. Cho a, b, c thỏa mãn $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng:

$$a\left(b^2-1\right)\left(c^2-1\right)+b\left(a^2-1\right)\left(c^2-1\right)+c\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)=4abc$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Xét vế trái, ta có :

$$a\left(b^2-1\right)\left(c^2-1\right)+b\left(a^2-1\right)\left(c^2-1\right)+c\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)$$

$$=a\left(b^2c^2-b^2-c^2+1\right)+b\left(a^2c^2-a^2-c^2+1\right)+c\left(a^2b^2-a^2-b^2+1\right)$$

$$=ab^2c^2-ab^2-ac^2+a+a^2bc^2-a^2b-bc^2+b+a^2b^2c-a^2c-b^2c+a$$

$$=\left(a+b+c\right)-\left(a^2b+ab^2-a^2b^2c\right)-\left(ac^2+a^2c-a^2bc^2\right)-\left(bc^2+b^2c-ab^2c^2\right)$$

$$=abc-ab\left(a+b-abc\right)-ac\left(c+a-abc\right)-bc\left(c+b-abc\right)$$

$$=abc+abc+abc+abc=4abc$$

Chương I. PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC ĐA THỨC

Chuyên đề 4. HẰNG ĐẲNG THỨC MỞ RỘNG

A. Kiến thức cần nhớ

1. Bình phương của một đa thức

$$\left(a_1+a_2+...+a_n\right)^2=a_1{}^2+a_2{}^2+...+a_2{}^2+2a_1a_2+2a_1a_3+...+2a_1a_n$$

$$+2a_2a_3+2a_2a_4+...+2a_2a_n+...+...+2a_{n-1}a_n$$

Đặc biệt ta có :

$$\left(a+b+c\right)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

$$\left(a+b-c\right)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$$

$$\left(a+b+c+d\right)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$$

2. Bảng khai triển hệ số: $\left(\mathbf{a}+\mathbf{b}\right)^{\mathbf{n}}$

Với $n=0$:	1					
Với $n=1$:	1	1				
Với $n=2$:	1	2	1			
Với $n=3$:	1	3	3	1		
Với $n=4$:	1	4	6	4	1	
Với $n=5$:	1	5	10	10	5	1

....

Mỗi dòng đều bắt đầu bằng 1 và kết thúc bằng 1

Mỗi số ở một dòng kể từ dòng thứ hai đều bằng số liền trên cộng với số bên trái của số liền trên.

Bảng trên đây được gọi là tam giác Pa-xcan, cho ta biết hệ số khi khai triển $\left(a+b\right)^n$. Chẳng hạn cho n các giá trị từ 0 đến 5 ta được:

$$\left(a+b\right)^0=1$$

$$\left(a+b\right)^1=a+b$$

$$\left(a+b\right)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$\left(a+b\right)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$\left(a+b\right)^4=a^3+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

$$\left(a+b\right)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

Chú ý: Khi khai triển $\left(a-b\right)^n$ ta vẫn làm như trên và các số hạng chứa b với lũy thừa lẻ thì mang dấu trừ đằng trước

3. Khai triển nhị thức $a^n - b^n$ và $a^n - b^n$ (n lẻ)

$a)a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$b)a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^5)$$

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 - ... + a^2b^{2k-2} - ab^{2k-1} + b^{2k})$$

4. Đẳng thức bậc ba

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a = b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

Đặc biệt:

- Nếu $a+b+c=0$ thì $a^3+b^3+c^3-3abc=0$
- Nếu $a^3+b^3+c^3-3abc=0$ thì $a+b+c=0$ hoặc $a=b=c$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho $a+b+c=0$ và $a^2+b^2+c^2=1$.Tính giá trị biểu thức $M=a^4+b^4+c^4$

Giải

Tìm cách giải. Để tạo ra kết luận, ta cần xuất phát từ $a^2+b^2+c^2=1$ và bình phương hai vế. Tuy nhiên khi đó lại xuất hiện $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ và cần tính biểu thức này. Để tính biểu thức đó ta cần tính được $ab+bc+ca$. Suy luận tự nhiên ta cần bình phương $a+b+c=0$. Bằng cách phân tích, lập luận như trên ta đã tìm ra cách giải.

Trình bày lời giải

Từ $a+b+c=0 \Rightarrow (a+b+c)^2=0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=0$

Mà $a^2+b^2+c^2=1 \Rightarrow ab+bc+ca=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow (ab+bc+ca)^2=\dfrac{1}{4}$

$$\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2ab^2c+2bc^2a+2ca^2b=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=\frac{1}{4} \Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{1}{4}$$

Từ $a^2+b^2+c^2=1 \Rightarrow (a^2+b^2+c^2)^2=1^2 \Rightarrow a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=1$

$$\Rightarrow a^4+b^4+c^4+2.\frac{1}{4}=1 \Rightarrow a^4+b^4+c^4=\frac{1}{2}$$

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức:

$$A=(x+y+z+t)^2+(x+y-z-t)^2+(x+z-y-t)^2+(x+t-y-z)^2$$

Giải

Khai triển ta có:

$$(x+y+z+t)^2=x^2+y^2+z^2+t^2+2xy+2xz+2xt+2yz+2yt+2zt$$

$$(x+y-z-t)^2=x^2+y^2+z^2+t^2+2xy-2xz-2xt-2yz-2yt+2zt$$

$$(x+z-y-t)^2=x^2+z^2+y^2+t^2-2xy+2xz-2xt-2yz+2yt-2zt$$

$$(x+t-y-z)^2=x^2+y^2+z^2+t^2-2xy-2xz+2xt+2yz-2yt-2zt$$

Cộng từng vế lại ta được:

$$(x+y+z+t)^2+(x+y-z-t)^2+(x+z-y-t)^2+(x+t-y-z)^2=4(x^2+y^2+z^2+t^2)$$

Nhận xét. Ngoài ra, ta có thể vận dụng đẳng thức $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$ để giải. Thật vậy:

$$(x+y+z+t)^2+(x+y-z-t)^2=2\left[(x+y)^2+(z+t)^2\right]$$

$$(x-y+z-t)^2+(x-y-z-t)^2=2\left[(x-y)^2+(z-t)^2\right]$$

Suy ra $A=(x+y+z+t)^2+(x+y-z-t)^2+(x+z-y-t)^2+(x+t-y-z)^2$

$$=2\left[(x+y)^2+(x-y)^2+(z+t)^2+(z-t)^2\right]$$

$$=2\left[2(x^2+y^2)+2(z^2+t^2)\right]=4(x^2+y+z^2+t^2)$$

Ví dụ 3: Cho a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=0$. Chứng minh rằng:

$$2(a^5+b^5+c^5)=5abc(a^2+b^2+c^2)$$

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy $a^5=a^3.a^2$, nên để xuất hiện vế phải chúng ta cần thay thế $3abc=a^3+b^3+c^3$ vào vế phải, sau đó khai triển. Khi khai triển xong, chúng ta cần biến đổi phần còn lại không phải là $a^5+b^5+c^5$ trở thành một phần của kết luận là xong.

Trình bày lời giải

Vì $a+b+c=0\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

Xét : $3abc(a^2+b^2+c^2)=(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)$

$$=a^5+b^5+c^5+a^3(b^2+c^2)+b^3(c^2+a^2)+c^3(a^2+b^2)(1)$$

Xét $b+c=-a\Rightarrow b^2+c^2+2bc=a^2\Leftrightarrow b^2+c^2=a^2-2bc$

Tương tự $c^2+a^2=b^2-2ac; a^2+b^2=c^2-2ab$

Thay vào (1) suy ra :

$$3abc\left(a^2+b^2+c^2\right)=a^5+b^5+c^5+a^3\left(a^2-2bc\right)+b^3\left(b^2-2ac\right)+c^3\left(c^2-2ab\right)$$

$$=2\left(a^5+b^5+c^5\right)-2abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Hay $2\left(a^5+b^5+c^5\right)=5abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$

Nhận xét. Nếu đặt $a=x-y,b=y-z,c=z-x$ thì ta có bài toán sau. Chứng minh rằng:

$$\frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{2}\cdot\frac{(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3}{3}\cdot\frac{(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5}{5}$$

Ví dụ 4: Xét các số thực x, y, z thỏa mãn $2\left(y^2+yz+z^2\right)+3x^2=36$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $A=x+y+z$

(Thi tuyển sinh lớp 10, trường THPT chuyên Nam Định , năm học 2014-2015)

Giải

Tìm cách giải. Giả thiết cho vế trái là đa thức bậc hai, mà kết luận là tìm cực trị đa thức bậc nhất. Do vậy để vận dụng được giả thiết ta cần xét A^2,sau đó khéo léo tách đa thức đó để vận dụng triệt để giả thiết.

Trình bày lời giải

Ta có :

$$A^2=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$$

$$A^2=2\left(y^2+z^2+yz\right)+3x^2-\left(x^2-2xy+y^2\right)-\left(x^2-2xz+z^2\right)$$

$$A^2=36-(x-y)^2-(x-z)^2\le 36$$

Suy ra $\max A=6$ tại $x=y=z=2$

$\min A=-6$ tại $x=y=z=-2$

Ví dụ 5: Với a, b, c là các số thực thỏa mãn:

$$(3a+3b+3c)^3=24+(3a+b-c)^3+(3b+c-a)^3+(3c+a-b)^3$$

Chứng minh rằng: $(a+2b)(b+2c)(c+2a)=1$

(Tuyển sinh lớp 10, trường THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, năm học 2015-2016)

Giải

Tìm cách giải. Quan sát kĩ đề bài, ta nhận thấy khai triển hai vế rồi phân tích thành nhân tử là quá dài, phức tạp và có thể dẫn đến sai lầm. Do vai trò như nhau của giả thiết, kết luận và giảm bớt sự khai triển ta có thể đổi biến:

$$x=3a+b-c,y=3b+c-a,z=3c+a-b$$

Khi đó giả thiết có dạng: $(x+y+z)^3=24+x^3+y^3+z^3$

Vì vế trái của kết luận có dạng là nhân tử nên ta dùng đẳng thức

$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x)$. Từ đó ta có lời giải sau :

Trình bày lời giải

Đặt $x = 3a + b - c, y = 3b + c - a, z = 3c + a - b$

$\Rightarrow x + y + z = 3a + 3b + 3c$

Từ giả thiết, ta suy ra : $(x+y+z)^3 = 24 + x^3 + y^3 + z^3$

Theo hằng đẳng thức, ta có : $(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x)$.

Suy ra $3(x+y)(y+z)(z+x) = 24$

$\Rightarrow (2a+4b)(2b+4c)(2c+4a) = 8$

$\Rightarrow (a+2b)(b+2c)(c+2a) = 1$

Điều phải chứng minh

C. Bài tập vận dụng

4.1. Rút gọn $(a+b+c)^2(a-b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (b+c-a)^2$

Hướng dẫn giải – đáp số

Khai triển ta có :

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca$

$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac$

$(b+c-a)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca$.

Cộng từng vế ta được :

$(a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (b+c-a)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2)$

Nhận xét : Ta có thể vận dụng đẳng thức $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2 + y^2)$ để giải, thật vậy:

$(a+c+b)^2 + (a+c-b)^2 = 2\left[(a+c)^2 + b^2\right]$;

$(b+a-c)^2 + (b-a+c)^2 = 2\left[b^2 + (a-c)^2\right]$.

Suy ra : $(a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (b+c-a)^2$

$= 2\left[(a+c)^2 + (a-c)^2 + 2b^2\right] = 2\left[2(a^2 + c^2) + 2b^2\right] = 4(a^2 + b^2 + c^2)$

4.2. Tìm hệ số x^3 của đa thức sau khi khai triển :

$a) A = (x+3)^3 + (x+4)^4 + (x+5)^5$

$b) B=(x-2)^3+(x+3)^4+(x-4)^5$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có:

$a) A=x^3+9x^2+27x+27+x^4+16x^3+96x^2+256x+256+x^5+25x^4+250x^3+1250x+3125x+3125$

$=x^5+26x^4+267x^3+1355x^2+3408x+3408$

Vậy hệ số của x^3 là 267

$b) B=x^3-6x^2+12x-8+x^4+12x^3+54x^2+108x$

$=81+x^5-20x^4+160x^3-640x^2+1280x-1024$

$=x^5-19x^4+173x^3-592x^2+1400x-951$

Vậy hệ số của x^3 là 173

4.3. Một tam giác có ba cạnh là a, b, c thỏa mãn điều kiện:

$(a+b+c)^2=3(ab+bc+ca)$. Hỏi tam giác đó là tam giác gì ?

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có :

$(a+b+c)^2=3(ab+bc+ca) \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=3(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0 \Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi $a=b=c$, tức là tam giác đó là tam giác đều.

4.4. Cho $a+b+c=0$ và $a^2+b^2+c^2=2$. Tính $a^4+b^4+c^4$

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ $a+b+c=0$

$\Rightarrow (a+b+c)^2=0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=0$

Mà $a^2+b^2+c^2=2 \Rightarrow ab+bc+ca=-1 \Rightarrow (ab+bc+ca)^2=1$

$\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2ab^2c+2bc^2a+2ca^2b=1$

$\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=1 \Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=1$

Từ $a^2+b^2+c^2=2$

$\Rightarrow (a^2+b^2+c^2)^2=2^2 \Rightarrow a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=4$

$\Rightarrow a^4+b^4+c^4+2.1=4 \Rightarrow a^4+b^4+c^4=2$

4.5. Cho $x+y+z=0$ và $xy+yz+zx=0$. Tính giá trị của biểu thức :

$$B=(x-1)^{2015}+y^{2016}+(z+1)^{2017}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ $x+y+z=0 \Rightarrow (x+y+z)^2=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=0$

Mà $xy+yz+zx=0$ nên $x^2+y^2+z^2=0$ do đó $x=y=z=0$

Vậy $B=(0-1)^{2015}+1^{2016}+(0+1)^{2017}=1$

4.6. Cho $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$ với $abc\neq 0$.Chứng minh rằng : $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ giả thiết ta có :

$a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2z^2+c^2y^2+c^2z^2$

$=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2acxz+2bcyz$

$\Leftrightarrow a^2y^2-2abxy+b^2x^2+a^2z^2-2acxz+c^2x^2+b^2z^2-2bcyz+c^2y^2=0$

$\Leftrightarrow (ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2=0$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} ay-bx=0 \\ az-cx=0 \\ bz-cy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ay=bx \\ az=cx \\ bz=cy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b} \\ \dfrac{x}{a}=\dfrac{z}{c} \\ \dfrac{z}{c}=\dfrac{y}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$$

4.7. Cho $a+b+c=2; a^2+b^2+c^2=4$ và $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$

Chứng minh rằng: $xy+yz+zx=0$

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ $a+b+c=2 \Rightarrow (a+b+c)^2=4 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=4$

Mà $a^2+b^2+c^2=4$ nên $ab+bc+ca=0$

Đặt $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{c}{z}=k \Rightarrow x=ak; y=bk; z=ck$

Xét $xy+yz+zx=abk^2+bck^2+cak^2=(ab+bc+ca)k^2=0$

Điều phải chứng minh

4.8. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $F(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+2$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có : $F(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+2$

$$= \left(x^2 - x + 1\right)^2 + 1 = \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^2 + 1 \ge \frac{9}{16} + 1 = \frac{25}{16}$$

Suy ra $F\left(x\right) \ge \frac{25}{16}$. Vậy $\min F\left(x\right) = \frac{25}{16}$ tại $x = 0,5$

4.9. Cho a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$ và $a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Tính giá trị của biểu thức $A = a^n + b^n + c^n$ với n là số tự nhiên lẻ

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng hằng đẳng thức : $\left(a + b + c\right)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3\left(a + b\right)\left(b + c\right)\left(c + a\right)$

$\Leftrightarrow 1 = 1 + 3\left(a + b\right)\left(b + c\right)\left(c + a\right) \Leftrightarrow \left(a + b\right)\left(b + c\right)\left(c + a\right) = 0$

Vậy, có một số bằng số đối của một số khác

Giả sử $a + b = 0 \Leftrightarrow c = 1 \Leftrightarrow A = 1$

Tương tự, nếu $b + c = 0$ hoặc $c + a = 0$, ta cũng được $A = 1$

4.10. Chứng minh hằng đẳng thức sau : $x^4 + y^4 + \left(x + y\right)^4 = 2\left(x^2 + xy + y^2\right)^2$

Hướng dẫn giải – đáp số

Biến đổi vế trái:

$x^4 + y^4 + \left(x + y\right)^4 = x^4 + y^4 + x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

$= 2\left(x^4 + y^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3\right) = 2\left(x^4 + y^4 + x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3\right)$

$= 2\left(x^2 + y^2 + xy\right)^2$

Vế trái bằng vế phải, điều phải chứng minh

4.11. Cho a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng :

$a) a^4 + b^4 + c^4 = 2\left(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2\right)$

$b) a^4 + b^4 + c^4 = 2\left(ab + bc + ca\right)^2$

Hướng dẫn giải – đáp số

a)Từ giả thiết $a + b + c = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2\left(ab + ac + bc\right) = 0$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2\left(ab + ac + bc\right)$

$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 + 2\left(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2\right) = 4\left(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2\right) + 8abc\left(a + b + c\right)$

$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 2\left(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2\right)$ (vì $a + b + c = 0$) (1)

b) Mặt khác $2\left(ab + ac + bc\right)^2 = 2\left(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2\right) + 4abc\left(a + b + c\right)$.

$\Rightarrow 2\left(ab + ac + bc\right)^2 = 2\left(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2\right)$ (vì $a + b + c = 0$) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow a^4+b^4+c^4=2\left(ab+ac+bc\right)^2$.

4.12. Cho x, y, z thỏa mãn $x+y+z=0$. Chứng minh rằng :

$a)5\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)=6\left(x^5+y^5+z^5\right)$

$b)x^7+y^7+z^7=7xyz\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)$

$c)10\left(x^7+y^7+z^7\right)=7\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^5+y^5+z^5\right)$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có xét vế trái: $5\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)$

$=5x^5+5y^5+5z^5+5x^3\left(y^2+z^2\right)+5y^3\left(x^2+z^2\right)+5z^3\left(x^2+y^2\right)$ (1)

Từ $x+y+z=0\Rightarrow x+y=-z\Rightarrow x^2+y^2+2xy=z^2$

$\Rightarrow x^2+y^2=z^2-2xy$

Tương tự : $y^2+z^2=x^2-2yz; z^2+x^2=y^2-2zx$

Thay vào (1) ta có:

$5\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)$

$=5x^5+5y^5+5z^5+5x^3\left(x^2-2yz\right)+5y^3\left(y^2-2zx\right)+5z^3\left(z^2-2xy\right)$

$=10x^5+10y^5+10z^5-10xyz\left(x^2+y^2+z^2\right)$ (2)

Mặt khác: $x^3+y^3+z^3=3xyz$ nên $xyz=\dfrac{x^3+y^3+x^3}{3}$, thay vào (2) ta có :

$$5\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)=10\left(x^5+y^5+z^5\right)-\frac{10\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)}{3}$$

$\Leftrightarrow 15\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)=30\left(x^5+y^5+z^5\right)-10\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)$

$\Leftrightarrow 25\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)=30\left(x^5+y^5+z^5\right)$

$\Leftrightarrow 5\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)=6\left(x^5+y^5+z^5\right)$ (điều phải chứng minh).

b) Ta có : $x^4+y^4+z^4=2\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)$ và $x^3+y^3+z^3=3xyz$

Nên $7xyz\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)=\dfrac{7\left(x^3+y^3+z^3\right)}{3}.\dfrac{\left(x^4+y^4+z^4\right)}{2}$ (3)

Xét $\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(x^4+y^4+z^4\right)$

$=x^7+y^7+z^7+x^3\left(y^4+z^4\right)+y^3\left(x^4+z^4\right)+z^3\left(x^4+y^4\right)$ (4)

Từ $x+y+z=0\Rightarrow x+y=-z\Rightarrow x^2+y^2+2xy=z^2\Rightarrow x^2+y^2=z^2-2xy$

$\Rightarrow x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = z^4 + 4x^2y^2 - 4xyz^2$

Suy ra $x^4 + y^4 = z^4 + 2y^2z^2 - 4x^2yz$

Tương tự ta có : $y^4 + z^4 = x^4 + 2y^2z^2 - 4x^2yz; z^4 + x^4 = y^4 + 2z^2x^2 - 4xy^2z$

Thay vào (4) ta có:

$$\left(x^3 + y^3 + z^3\right)\left(x^4 + y^4 + z^4\right) = x^7 + y^7 + z^7 + x^3\left(x^4 + 2y^2z^2 - 4x^2yz\right)$$

$$+y^3\left(y^4 + 2z^2x^2 - 4xy^2z\right) + z^3\left(z^4 + 2x^2y^2 - 4xyz^2\right)$$

$$= 2\left(x^7 + y^7 + z^7\right) + 2x^2y^2z^2\left(x + y + z\right) - 4xyz\left(x^4 + y^4 + z^4\right)$$

$$= 2\left(x^7 + y^7 + z^7\right) - \frac{4\left(x^3 + y^3 + z^3\right)\left(x^4 + y^4 + z^4\right)}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^3 + y^3 + z^3\right)\left(x^4 + y^4 + z^4\right) = 6\left(x^7 + y^7 + z^7\right) - 4\left(x^3 + y^3 + z^3\right)\left(x^4 + y^4 + z^4\right)$$

$$\Leftrightarrow 7\left(x^3 + y^3 + z^3\right)\left(x^4 + y^4 + z^4\right) = 6\left(x^7 + y^7 + z^7\right)$$

Thay vào (3) ta có : $7xyz\left(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\right) = x^7 + y^7 + z^7$

Điều phải chứng minh

c) Xét $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\left(x^5 + y^5 + z^5\right)$

$$= x^7 + y^7 + z^7 + x^5\left(y^2 + z^2\right) + y^5\left(z^2 + y^2\right) + z^5\left(x^2 + y^2\right) \quad (5)$$

Từ $x + y + z = 0 \Rightarrow x + y = -z \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = z^2$

Suy ra $x^2 + y^2 = z^2 - 2xy$;

Tương tự $y^2 + z^2 = x^2 - 2yz; x^2 + z^2 = y^2 - 2zx$

Thay vào (5) ta có :

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\left(x^5 + y^5 + z^5\right) = x^7 + y^7 + z^7 + x^5\left(x^2 - 2xy\right) + y^5\left(y^2 - 2xz\right) + z^5\left(z^2 - 2xy\right)$$

$$= 2\left(x^7 + y^7 + z^7\right) - 2xyz\left(x^4 + y^4 + z^4\right)$$

$$= 2\left(x^7 + y^7 + z^7\right) - \frac{2\left(x^3 + y^3 + z^3\right)\left(x^4 + y^4 + z^4\right)}{3} \quad (6)$$

Theo câu b, ta có: $\left(x^3 + y^3 + z^3\right)\left(x^4 + y^4 + z^4\right) = \dfrac{6\left(x^7 + y^7 + z^7\right)}{7}$

Thay vào (6) ta có:

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\left(x^5 + y^5 + z^5\right) = 2\left(x^7 + y^7 + z^7\right) - \frac{4\left(x^7 + y^7 + z^7\right)}{7}$$

$$\Leftrightarrow 77\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\left(x^5 + y^5 + z^5\right) = 10\left(x^7 + y^7 + z^7\right)$$

Điều phải chứng minh.

Chuyên đề 5. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP KHÁC

A. Kiến thức cần nhớ

1. Chúng ta đã biết ba phương pháp để phân tích một đa thức thành nhân tử là đặt nhân tử chung, dùng hằng đẳng thức, nhóm các hạng tử và phối hợp ba phương pháp đó. Tuy nhiên có những đa thức mặc dù rất đơn giản, nếu chỉ biết dùng ba phương pháp đó thôi thì không thể phân tích thành nhân tử được. Do đó trong chuyên đề này chúng ta sẽ xét thêm một số phương pháp khác để phân tích đa thức thành nhân tử.

Phương pháp tách một hạng tử thành nhiều hạng tử.

Phương pháp thêm bớt cùng một hạng tử

Phương pháp đổi biến

Phương pháp đồng nhất hệ số

Phương pháp xét giá trị riêng của các biến.

B. Một số ví dụ

1. Phương pháp tách một hạng tử thành nhiều hạng tử

Ví dụ 1: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

Giải

Cách 1: Tách hạng tử thứ hai: $-3x = -2x - x$

Ta có: $f(x) = (2x^2 - 2x) - (x-1) = 2x(x-1) - (x-1) = (x-1)(2x-1)$

Cách 2: Tách hạng tử thứ nhất và hạng tử thứ hai: $2x^2 = x^2 + x^2$.

Ta có:

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1) + (x^2 - x) = (x-1)^2 + x(x-1) = (x-1)[(x-1)+x]$$

$$= (x-1)(2x-1)$$

Nhận xét. Để phân tích tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ra nhân tử, ta tách hạng tử bx thành $b_1x + b_2x$ sao cho $b_1b_2 = ac$ và $b_1 + b_2 = b$.

Ví dụ 2: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $f(x) = x^3 - x^2 - 4$

Giải

Tìm cách giải. Ta lần lượt kiểm tra với $x = \pm 1; x = \pm 2; x = \pm 4$, ta thấy $f(2) = 0$.

Đa thức $f(x)$ có nghiệm $x = 2$, do đó khi phân tích thành nhân tử, $f(x)$ chứa nhân tử $x - 2$.

Trình bày lời giải

Ta có: $f(x) = x^3 - x^2 - 4 = (x^3 - 2x^2) + (x^2 - 2x) + (2x - 4)$

$= x^2(x-2) + x(x-2) + 2(x-2)$

$= (x-2)(x^2 + x + 2)$

Nhận xét. Nếu đa thức $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ có nghiệm nguyên là $x=x_0$ thì x_0 là một ước của hệ số tự do a_0 khi phân tích $f(x)$ ra nhân tử thì $f(x)$ có chứa nhân tử $x-x_0$. Vì vậy đối với những đa thức một biến bậc cao, ta nên nhẩm lấy một nghiệm của nó để định hướng việc phân tích thành nhân tử.

2. Phương pháp thêm bớt cùng một hạng tử

Ví dụ 3: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: x^4+324

Giải

$x^4+324=x^4+36x^2+324-36x^2$

$=(x^2+18)^2-(6x)^2=(x^2+18-6x)(x^2+18-6x)$

Ví dụ 4: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: x^5+x^4+1

Giải

$x^5+x^4+1=x^5+x^4+x^3-x^3+1$

$=x^3(x^2+x+1)-(x-1)(x^2+x+1)$

$=(x^2+x+1)(x^3-x+1)$

Nhận xét. Với kỹ thuật trên chúng ta phân tích thành nhân tử được: $x^{3k+2}+x^{3n+1}+1$

3. Phương pháp đổi biến

Một số đa thức có bậc cao, nhờ đặt biến phụ đưa về đa thức có bậc thấp hơn để thuận tiện cho việc phân tích thành nhân tử, sau khi phân tích thành nhân tử đối với đa thức mới, thay trở lại biến cũ để được đa thức với biến cũ.

Ví dụ 5: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $f(x)=x(x+4)(x+6)(x+10)+128$

Giải

Ta có: $f(x)=(x^2+10x)(x^2+10x+24)+128$

Đặt $x^2+10x+12=y$, đa thức trở thành:

$f(y)=(y-12)(y+12)+128=y^2-16=(y-4)(y+4)$

Suy ra: $f(x)=(x^2+10x+8)(x^2+10x+16)=(x+2)(x+8)(x^2+10x+8)$

Ví dụ 6: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-15$

Giải

Tìm cách giải. Bài toán có dạng $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+m$ với $a+d=b+c$. Ta có thể đặt $y=(x+a)(x+d)$ hoặc $y=(x+b)(x+c)$ hoặc $y=x^2+(a+d)x$. Khi đó ta phân tích với đa thức biến y.

Trình bày lời giải

Ta có: $(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-15=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-15$

Đặt $y=x^2+5x+9$.

Khi đó đa thức có dạng: $y(y+2)-15=y^2+2y-15=(y+5)(y-3)$

Từ đó suy ra: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-15=(x^2+5x+9)(x^2+5x+1)$

Ví dụ 7: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$A=(3x+2)(3x-5)(x-1)(9x+10)+24x^2$

Giải

Tìm cách giải. Nếu khai triển ngoặc thì bài toán trở lên khá phức tạp và có thể dẫn đến sai lầm. Quan sát kĩ đề bài chúng ta nhận thấy hệ số của bốn ngoặc có đặc điểm: $3.3=1.9$ và $2.(-5)=(-1).10$, do vậy chúng ta nghĩ đến việc nhóm hai ngoặc lại và đặt biến phụ nhằm đưa về bài toán đơn giản hơn.

Trình bày lời giải

Ta có:

$A=(3x+2)(3x-5)(x-1)(9x+10)+24x^2$

$=(9x^2-9x-10)(9x^2+x-10)+24x^2$

Đặt $y=9x^2-9x-10$. Đa thức có dạng:

$A=y(y+10x)+24x^2$

$=y^2+10xy+24y^2=y^2+4xy+6xy+24y^2=(y+4x)(y+6x)$

Từ đó suy ra: $A=(9x^2-3x-10)(9x^2-5x-10)$

Nhận xét. Cách giải trên có thể dùng cho các đa thức có dạng:

$P(x)=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)(a_3x+b_3)(a_4x+b_4)+mx^2$

trong đó $a_1a_2=a_3a_4;\mathrm{b}_1b_2=b_3b_4$

Ví dụ 8: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $B=2x^4+3x^3-9x^2-3x+2$

Giải

Tìm cách giải. Những bài toán có dạng: $ax^4+bx^3+cx^2+kax+k^2b^2$ với $k=1$ hoặc $k=-1$.

Ta đặt $y=x^2+k$, rồi biến đổi biểu thức về dạng $ax^2+bxy+my^2$

Trình bày lời giải

Đặt $y=x^2-1\Rightarrow y^2=x^4-2x^2+1$. Biến đổi biểu thức, ta có:

$B=2(x^4-2x^2+1)+3x^3-3x-5x^2=2(x^2-1)^2+3x(x^2-1)-5x^2$

Từ đó, biểu thức có dạng:

$B=2y^2+3xy-5x^2=2y^2-2xy+5xy-5x^2=(y-x)(2y+5x)$

Từ đó suy ra: $B=\left(x^2-x-1\right)\left(2x^2+5x-2\right)$.

4. Phương pháp đồng nhất hệ số

Ví dụ 9: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $f\left(x\right)=x^4-6x^3+12x^2-14x+3$

Giải

Tìm cách giải. Các số $\pm1;\pm3$ không phải là nghiệm của đa thức $f\left(x\right)$ nên $f\left(x\right)$ không có nghiệm nguyên, $f\left(x\right)$ cũng không có nghiệm hữu tỷ. Như vậy nếu $f\left(x\right)$ phân tích được thành nhân tử thì phải có dạng: $\left(x^2+ax+b\right)\left(x^2+cx+d\right)$, với $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$.

Khai triển dạng này ra, ta được đa thức: $x^4+\left(a+c\right)x^3+\left(ac+b+d\right)x^2+\left(ad+bc\right)x+bd$. Đồng nhất đa thức này với $f\left(x\right)$ ta được hệ điều kiện: $\begin{cases}a+c=-6\\ac+b+d=12\\ad+bc=-14\\bd=3\end{cases}$.

Xét $bd=3$, với $b,d\in\mathbb{Z},b\in\left\{\pm1;\pm3\right\}$.

Với $b=3$ thì $d=1$, hệ điều kiện trở thành: $\begin{cases}a+c=-6\\ac=8\\a+3c=-14\end{cases}$

Từ đó tìm được: $a=-2;c=-4$. Vậy $f\left(x\right)=\left(x^2-2x+3\right)\left(x^2-4x+1\right)$.

Trình bày lời giải

$f\left(x\right)=x^4-6x^3+12x^2-14x+3$

$=\left(x^4-4x^3+x^2\right)-\left(2x^3+8x^2-2x\right)+\left(3x^2-12x+3\right)$

$=x^2\left(x^2-4x+1\right)-2x\left(x^2-4x+1\right)+3\left(x^2-4x+1\right)$

$=\left(x^2-4x+1\right)\left(x^2-2x+3\right)$

5. Phương pháp xét giá trị riêng của các biến

Ví dụ 10: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $P=x^2\left(y-z\right)+y^2\left(z-x\right)+z^2\left(x-y\right)$

Giải

Nhận xét. Nếu thay x bởi y thì $P=0$, nên P chia hết cho $x-y$.

Hon nữa nếu thay x bởi y, y bởi z, z bởi x thì P không thay đổi (ta nói đa thức P có dạng hoán vị vòng quanh). Do đó: P chia hết cho $x-y$ thì P cũng chia hết cho $y-z,z-x$.

Từ đó: $P=a\left(x-y\right)\left(y-z\right)\left(z-x\right)$; trong đó a là hằng số, không chứa biến vì P có bậc 3 đối với tập hợp các biến, còn tích $\left(x-y\right)\left(y-z\right)\left(z-x\right)$ cũng có bậc 3 đối với tập hợp các biến.

Ta có: $P = x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y) = a(x-y)(y-z)(z-x)$ (*) đúng với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ nên ta chọn các giá trị riêng cho x, y, z để tìm hằng số a là xong.

Chú ý. Các giá trị của x, y, z ta có thể chọn tùy ý, chỉ cần chúng đôi một khác nhau để tránh $P = 0$ là được. Chẳng hạn, chọn $x = 2; y = 1; z = 0$ thay vào đẳng thức (*),ta tìm được $a = -1$

Vậy: $P = x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y) = -(x-y)(y-z)(z-x)$

$= (x-y)(y-z)(x-z)$

Ví dụ 11: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$Q = a(b+c-a)^2 + b(c+a-b)^2 + c(a+b-c)^2 + (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

Giải

Nhận xét. Với $a = 0$ thì $Q = 0$, cho nên a là một nhân tử của Q. Do vai trò bình đẳng của a, b, c nên b và c cũng là nhân tử của Q, mà Q có bậc 3 đối với tập hợp các biến nên $Q = k.abc$.

Chọn $a = b = c = 1$ được $k = 4$. Vậy $Q = 4abc$.

C. Bài tập vận dụng

Phương pháp tách một hạng tử thành nhiều hạng tử

5.1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a) $4x^2 - 4x - 3$; b) $2x^2 - 5x - 3$; c) $3x^2 - 5x - 2$;

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $4x^2 - 4x - 3 = 4x^2 - 4x + 1 - 4$

$= (2x-1)^2 - 4 = (2x-1-2)(2x-1+2) = (2x-3)(2x+1)$

b) $2x^2 - 5x - 3 = 2x^2 + x - 6x - 3$

$= x(2x+1) - 3(2x+1) = (2x+1)(x-3)$

c) $3x^2 - 5x - 2 = 3x^2 + x - 6x - 2$

$= x(3x+1) - 2(3x+1) = (3x+1)(x-2)$

5.2. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^3 + 2x - 3$; b) $x^3 - 7x + 6$; c) $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$;

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $x^3 + 2x - 3 = x^3 - 1 + 2x - 2$

$= (x-1)(x^2+x+1) + 2(x-1)$

$= (x-1)(x^2+x+1+2)$

$= (x-1)(x^2+x+3)$

b) $x^3 - 7x + 6 = x^3 - 1 - 7x + 7$

$= (x-1)(x^2+x+1) - 7(x-1)$

$= (x-1)(x^2+x+1-7)$

$= (x-1)(x^2+x-6)$

$= (x-1)(x^2-2x+3x-6)$

$= (x-1)(x-2)(x-3)$

c) $x^3+5x^2+8x+4 = x^3+x^2+4x^2+4x+4x+4$

$= (x+1)(x^2+4x+4) = (x+1)(x+2)^2$

5.3. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a) $P = (x^2-x+2)^2 + (x-2)^2$;

b) $Q = 6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1$;

c) $C = x^4-9x^3+28x^2-36x+16$**;**

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có:

$P = (x^2-x+2)^2 + (x-2)^2$

$= x^4+x^2+4-2x^3+4x^2-4x+x^2-4x+4$

$= x^4-2x^3+6x^2-8x+8$

$= x^4-2x^3+2x^2+4x^2-8x+8$

$= x^2(x^2-2x+2)+4(x^2-2x+2) = (x^2-2x+2)(x^2+4)$

b) Ta có: $Q = 6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1$

$= (6x^5+3x^4)+(12x^4+6x^3)+(14x^3+7x^2)+(8x^2+4x)+(2x+1)$

$= (2x+1)(3x^4+6x^3+7x^2+4x+1)$

$= (2x+1)(3x^4+3x^3+3x^2+3x^3+3x^2+3x+x^2+x+1)$

$= (2x+1)(x^2+x+1)(3x^2+3x+1)$

c) $C = (x^4-5x^3+4x^2)-(4x^3-20x^2+16x)+(4x^2-20x+16)$

$= (x^2-5x+4)(x^2-4x+4)$

$= (x-1)(x-4)(x-2)^2$

5.4. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a) $A = 10x^4-27x^3y-110x^2y^2-27xy^3+10y^4$;

b) $B=x^5-4x^4+3x^3+3x^2-4x+1$

c) $C=bc(a+d)(b-c)+ac(b+d)(c-a)+ab(c+d)(a-b)$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $A=10x^4+20x^2y^2+10y^4-27xy(x^2+y^2)-130x^2y^2$

$=10(x^2+y^2)^2-27xy(x^2+y^2)-130x^2y^2$

$=10(x^2+y^2)^2+25xy(x^2+y^2)-52xy(x^2+y^2)-130x^2y^2$

$=5(x^2+y^2)(2x^2+2y^2+5xy)-26xy(2x^2+2y^2+5xy)$

$=(2x^2+2y^2+4xy+2y^2)(5x^2-xy-25xy+5y^2)$

$=(2x^2+xy+4xy+2y^2)(5x^2-xy-25xy+5y^2)$

$=(2x+y)(x+2y)(x-5y)(5x-y)$

b) $B=x^5-4x^4+3x^3+3x^2-4x+1$

$=x^5+x^4-5x^4-5x^3+8x^3+8x^2-5x^2-5x+x+1$

$=(x+1)(x^4-5x^3+8x^2-5x+1)$

$=(x+1)(x^4-2x^3+x^2-3x^3+6x^2-3x+x^2-2x+1)$

$=(x+1)\left(x^2(x^2-2x+1)-3x(x^2-2x+1)+(x^2-2x+1)\right)$

$=(x+1)(x-1)^2(x^2-3x+1)$

c) $C=bc(a+d)(b-c)+ac(b+d)(c-b+b-a)+ab(c+d)(a-b)$

$=bc(a+d)(b-c)-ac(b+d)(b-c)-ac(b+d)(a-b)+ab(c+d)(a-b)$

$=c(b-c)(ab+bd-ab-ad)-a(a-b)(bc+cd-bc-bd)$

$=c(b-c)(bd-ad)-a(a-b)(cd-bd)$

$=cd(b-c)(b-a)-ad(b-a)(b-c)$

$=d(b-c)(b-a)(c-a)$

5.5. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a) $4x(x+y).(x+z).(x+y+z)+y^2z^2$; b) $3(x^4+x^2+1)-(x^2+x+1)^2$.

c) $x^4-2y^4-x^2y^2+x^2+y^2$. d) $2x^4-x^3y+3x^2y^2-xy^2+2y^4$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $4x(x^2+xy+xz+yz).(x+y+z)+y^2z^2$

$= 4x\left[x(x+y+z)+yz\right](x+y+z)+y^2z^2$

$= 4x^2(x+y+z)^2+4xyz(x+y+z)+y^2z^2$

$= \left[2x(x+y+z)+yz\right]^2+\left(2x^2+2xy+2xz+yz\right)^2$

b) $3\left(x^4+2x^2+1-x^2\right)-\left(x^2+x+1\right)^2$

$= 3\left[\left(x^2+1\right)^2-x^2\right]-\left(x^2+x+1\right)^2$

$= 3\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)-\left(x^2+x+1\right)^2$

$= \left(x^2+x+1\right)\left[3x^2-3x+3-x^2-x-1\right]$

$= \left(x^2+x+1\right)\left(2x^2-4x+2\right)=2\left(x^2+x+1\right)(x-1)^2$

c) $x^4-2y^4-x^2y^2+x^2+y^2=\left(x^4-y^4\right)-\left(y^4+x^2y^2\right)+\left(x^2+y^2\right)$

$= \left(x^2+y^2\right)\left(x^2-y^2\right)-y^2\left(x^2+y^2\right)+\left(x^2+y^2\right)$

$= \left(x^2+y^2\right)\left(x^2-2y^2+1\right)$

d) $2x^4+4x^2y^2+2y^4-x^3y-xy^3-x^2y^2$

$= 2\left(x^2+y^2\right)^2-xy\left(x^2+y^2\right)-x^2y^2$

$= 2\left(x^2+y^2\right)^2-2xy\left(x^2+y^2\right)+xy\left(x^2+y^2\right)-x^2y^2$

$= 2\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2-xy\right)+xy\left(x^2+y^2-xy\right)$

$= \left(x^2+y^2-xy\right)\left(2x^2+2y^2+xy\right)$

5.6. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a) $M=3xyz+x\left(y^2+z^2\right)+y\left(x^2+z^2\right)+z\left(x^2+y^2\right)$

b) $x^8y^8+x^4y^4+1$

c) $N=x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+2xyz$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $M=3xyz+xy^2+xz^2+yx^2+yz^2+zx^2+zy^2$

$= \left(xyz+xy^2+yz^2\right)+\left(xyz+xz^2+zx^2\right)+\left(xyz+yz^2+zy^2\right)$

$= xy(z+y+x)+xz(y+z+x)+yz(x+z+y)$

$= (x+y+z)(xy+xz+yz)$

b) $x^8y^8+x^4y^4+1$

$=\left(x^4y^4+1\right)^2-x^4y^4=\left(x^4y^4-x^2y^2+1\right)\left(x^4y^4+x^2y^2+1\right)$

$=\left(x^4y^4-x^2y^2+1\right)\left[\left(x^2y^2+1\right)^2-x^2y^2\right]$

$=\left(x^4y^4-x^2y^2+1\right)\left(x^2y^2-xy+1\right)\left(x^2y^2+xy+1\right)$

c) $N=\left(x^2y+xy^2\right)+\left(x^2z+xz^2+xyz\right)+\left(y^2z+yz^2+xyz\right)$

$=xy(x+y)+xz(x+z+y)+yz(y+z+x)$

$=xy(x+y)+z(x+y+z)(x+y)=(x+y)\left[xy+z(x+y+z)\right]$

$=(x+y)\left(xy+xz+yz+z^2\right)=(x+y)(y+z)(z+x)$

5.7. Cho đa thức $P(x)=2x^4-7x^3-2x^2+13x+6$

a) Phân tích P(x) thành nhân tử.

b) Chứng minh rằng P(x) chia hết cho 6 với mọi số nguyên x.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $P(x)=2x^4+2x^3-9x^3-9x^2+7x^2+7x+6x+6$

$=2x^3(x+1)-9x^2(x+1)+7x(x+1)+6(x+1)$

$=(x+1)\left(2x^3-9x^2+7x+6\right)$

$=(x+1)\left(2x^3-4x^2-5x^2+10x-3x+6\right)$

$=(x+1).(x-2).\left(2x^2-5x-3\right)=(x+1).(x-2),\left(2x^2-6x+x-3\right)$

$=(x+1).(x-2).(x-3).(2x+1)$

b) Với x là số nguyên thì $x-3;x-2$ là hai số nguyên lên tiếp nên

$(x-3)(x-2)\vdots 2\Rightarrow P(x)\vdots 2$

Với $x\vdots 3\Rightarrow x-3\vdots 3\Rightarrow P(x)\vdots 3$

Với $x\vdots 3$ dư 1 thì $2x+1\vdots 3\Rightarrow P(x)\vdots 3$

Với $x\vdots 3$ dư 2 thì $x-2\vdots 3\Rightarrow P(x)\vdots 3$

Với mọi x là số nguyên

Vì $ƯCLN(2;3=1)$ nên $P(x)\vdots 6$

5.8. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a) $2x^3-5x^2+8x-3$

b) $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2-a^3-b^3-c^3+4abc$

c) $\left(x^2-3x-1\right)^2-12x^2+36x+39$;

d) $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $2x^3-5x^2+8x-3$

$=2x^3-x^2-4x^2+2x+6x-3=(2x-1)\left(x^2-2x+3\right)$

b) $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2-a^3-b^3-c^3+4abc$

$=ab^2-2abc+ac^2+bc^2-2abc+ba^2+ca^2-2abc+cb^2-a^3-b^3-c^3+4abc$

$=ab^2+ac^2+bc^2+a^2b+a^2c+b^2c-a^3-b^3-c^3-2abc$

$=\left(-a^3-a^2b+a^2c\right)+\left(2a^2b+2ab^2-2abc\right)+\left(-ab^2-b^3+b^2c\right)+\left(ac^2+bc^2-c^3\right)$

$=-a^2(a+b-c)+2ab(a+b-c)-b^2(a+b-c)+c^2(a+b-c)$

$=(a+b-c)\left(-a^2+2ab-b^2+c^2\right)$

$=(a+b-c)\left[c^2-(a-b)^2\right]=(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

c) $\left(x^2-3x-1\right)^2-12x^2+36x+39$

$=\left(x^2-3x-1\right)^2-12\left(x^2-3x-1\right)+27$

$=\left(x^2-3x-1-3\right)\left(x^2-3x-1-9\right)=\left(x^2-3x-4\right)\left(x^2-3x-10\right)$

$=(x+1)(x-4)(x+2)(x-5)$

d) $a^4+2a^2b^2+b^4+c^4-2b^2c^2-4a^2b^2$

$=\left(a^2+b^2\right)^2+c^2-2c^2\left(a^2+b^2\right)-4a^2b^2=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-4a^2b^2$

$=\left(a^2+b^2-c^2+2ab\right)\left(a^2+b^2-c^2-2ab\right)$

$=\left[(a+b)^2-c^2\right]\left[(a-b)^2-c^2\right]$

$=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$

Phương pháp thêm bớt cùng một hạng tử

5.9. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a) $a(b+c)\left(b^2-c^2\right)+b(a+c)\left(c^2-b^2\right)+c(a+b)\left(a^2-b^2\right)$;

b) $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$;

c) $a\left(b^2-c^2\right)-b\left(a^2-c^2\right)+c\left(a^2-b^2\right)$;

d) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $a(b+c)(b^2-c^2)+b(a+c)(c^2-b^2+b^2-a^2)+c(a+b)(a^2-c^2)$

$=a(b+c)(b^2-c^2)-b(a+c)(b^2-c^2)-b(a+c)(a^2-b^2)+c(a+b)(a^2-b^2)$

$=(b^2-c^2)[a(b+c)-b(a+c)]-(a^2-b^2)[b(a+c)-c(a+b)]$

$=(b^2-c^2)(ac-bc)-(a^2-b^2)(ab-ac)$

$=c(b+c)(b-c)(a-b)-a(a+b)(a-b)(b-c)$

$=(a-b)(b-c)[c(b+c)-a(a+b)]$

$(a-b)(b-c)(bc+c^2-a^2-ab)$

$=(a-b)(b-c)(bc+c^2-a^2-ab)$

$=(a-b)(b-c)[(c-a)(c+a)+b(c-a)]$

$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

b) $ab(a-b)+bc(b-a+a-c)+ca(c-a)$

$=ab(a-b)-bc(a-b)-bc(c-a)+ca(c-a)$

$=b(a-b)(a-c)-c(a-c)(b-a)$

$=b(a-b)(a-c)-a(a-c)(a-b)$

$=(a-b)(a-c)(b-c)$

c) $a(b^2-c^2)-b(b^2-c^2+a^2-b^2)+c(a^2-b^2)$

$=a(b^2-c^2)-b(b^2-c^2)-b(a^2-b^2)+c(a^2-b^2)$

$=(b^2-c^2)(a-b)-(a^2-b^2)(b-c)$

$=(b+c)(b-c)(a-b)-(a+b)(a-b)(b-c)$

$=(b-c)(a-b)(b+c-a-b)$

$=(b-c)(a-b)(c-a)$

d) $a^3(b-c)+b^3(c-b+b-a)+c^3(a-b)$

$=a^3(b-c)-b^3(b-c)-b^3(a-b)+c^3(a-b)$

$=(b-c)(a^3-b^3)-(a-b)(b^3-c^3)$

$=(b-c)(a-b)(a^2+ab+b^2)-(a-b)(b-c)(b^2+bc+c^2)$

$=(b-c)(a-b)(a^2+ab+b^2-b^2-bc-c^2)$

$=(b-c)(a-b)((a-c)(a+c)+b(a-c))$

$=(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)$

5.10. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

b) $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$;

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $(a-b)^3+(b-c)^3-(a-c)^3$

$=(a-b)^3+(b-c)^3-[(a-b)+(b-c)]^3$

$=(a-b)^3+(b-c)^3-(a-b)^3-3(a-b)^2(b-c)-3(a-b)(b-c)^2-(b-c)^3$

$=-3(a-b)(b-c)(a-b+b-c)$

$=3(a-b)(b-c)(c-a)$

b) $(x+y)^3+3(x+y)^2z+3(x+y)z^2+z^3-x^3-y^3-z^3$

$=x^3+y^3+3xy(x+y)+3(x+y)^2z+3(x+y)z^2-x^3-y^3$

$=3(x+y)(xy+xz+yz+z^2)$

$=3(x+y)(x+z)(y+z)$

5.11. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a) x^7+x^2+1; b) x^8+x+1; c) x^8+x^7+1; d) x^5+x+1;

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $x^7+x^2+1=x^7-x+x+1=x(x^6-1)+(x^2+x+1)$

$=x(x^3+1)(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)$

$=(x^2+x+1)[x(x^3+1)(x-1)+1]$

$=(x^2+x+1)(x^5-x^4+x^2-x+1)$

b) $x^8+x+1=x^8-x^2+x+1$

$=x^2(x^6-1)+(x^2+x+1)$

$=x^2(x^3+1)(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)$

$=\left(x^2+x+1\right)\left[x^2\left(x^3+1\right)(x-1)+1\right]$

$=\left(x^2+x+1\right)\left(x^6-x^5+x^3-x^2+1\right)$

c) $x^8+x^7+1=x^8+x^7+x^6-x^6+1$

$=x^6\left(x^2+x+1\right)-\left(x^3+1\right)\left(x^3-1\right)$

$=x^6\left(x^2+x+1\right)-\left(x^3+1\right)(x-1)\left(x^2+x+1\right)$

$=\left(x^2+x+1\right)\left(x^6-\left(x^3+1\right)(x-1)\right)$

$=\left(x^2+x+1\right)\left(x^6-x^4+x^3-x+1\right)$

d) x^5+x+1

$=x^5-x^2+\left(x^2+x+1\right)=x^2(x-1)\left(x^2+x+1\right)+\left(x^2+x+1\right)$

$=\left(x^3-x^2+1\right)\left(x^2+x+1\right)$

Phương pháp đổi biến

5.12. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a) $M=(4x+1)(12x-1)(3x+2)(x+1)-4$;

b) $N=(x+2)(x+3)^2(x+4)-12$;

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có:

$M=(4x+1)(12x-1)(3x+2)(x+1)-4$

$=\left(12x^2+11x+2\right)\left(12x^2+11x-1\right)-4$

Đặt $12x^2+11x-1=y$, đa thức có dạng:

$M=(y+3)y-4=y^2+3y-4=y^2-y+4y-4=(y-1)(y+4)$

Từ đó suy ra $M=\left(12x^2+11x-2\right)\left(12x^2+11x+3\right)$

b) Ta có $N=(x+3)^2(x+2)(x+4)-12$

$=\left(x^2+6x+9\right)\left(x^2+6x+8\right)-12$

Đặt $x^2+6x+8=y$, đa thức có dạng:

$N=(y+1)y-12=y^2+y-12=y^2-3y+4y-12=(y-3)(y+4)$

Từ đó suy ra $N=\left(x^2+6x+5\right)\left(x^2+6x+12\right)$

$N=\left(x^2+x+5x+9\right)\left(x^2+6x+12\right)$

$=(x+1)(x+5)(x^2+6x+12)$

5.13. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a) $A=(48x^2+8x-1)(3x^2+5x+2)-4$;

b) $B=4(x^2+11x+30)(4x^2+22x+120)-23x^2$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có: $A=(48x^2+12x-4x-1)(3x^2+3x+2x+2)-4$

$=(4x+1)(12x-1)(3x+2)(x+1)-4$

Đến đây, giải giống bài ***5.12a***

b) $B=(4x^2+44x+120)(4x^2+22x+120)-23x^2$

Đặt $4x^2+44x+120=y$, suy ra: $B=(y+11x)(y-11x)-23x^2$

$B=y^2-121x^2-23x^2=y^2-144x^2$

$=(y-12x)(y+12x)$

Từ đó suy ra $B=(4x^2+11x+120)(4x^2+45x+120)$

5.14. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a) $M=(7-x)^4(5-x)^4-2$;

b) $N=(x-3)^4+(9x-1)^4-16$;

c) $P=x^4-3x^3-6x^2+3x+1$;

d) $Q=x^4-x^3-10x^2+2x+4$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Đặt $y=6-x$, khi đó đa thức có dạng:

$M=(1+y)^4+(y-1)^4-2=2y^4+12y^2 \Rightarrow M=2y^2(y^2+6)$

Từ đó suy ra: $M=2(6-x)^2(x^2-12x+42)$

b) Đặt $y=x-2$, khi đó đa thức có dạng:

$N=(y-1)^4+(y+1)^4-16=2y^4+12y^2-14$

$=2(y^4+6y^2-7)=2(y^2+7)(y^2-1)=2(y^2+7)(y-1)(y+1)$

Từ đó suy ra: $N=2(x^2-4x+11)(x-3)(x-1)$

c) Đặt $y=x^2-1 \Rightarrow y^2=x^4-2x^2+1$. Biến đổi biểu thức, ta có:

$P=(x^4-2x^2+1)-3x^3+3x-4x^2=(x^2-1)^2-3x(x^2-1)-4x^2$

Từ đó, biểu thức có dạng:

$P=y^2-3xy-4x^2=y^2+xy-4xy-4x^2=(y+x)(y-4x)$

Từ đó suy ra: $P=\left(x^2+x-1\right)\left(x^2-4x-1\right)$

d) Đặt $y=x^2-2 \Rightarrow y^2=x^4-4x^2+4$. Biến đổi biểu thức, ta có:

$Q=\left(x^4-4x^2+4\right)-x^3+2x-6x^2=\left(x^2-2\right)^2-x\left(x^2-1\right)-6x^2$

Từ đó, biểu thức có dạng:

$Q=y^2-xy-6x^2=y^2+2xy-3xy-6x^2=\left(y+2x\right)\left(y-3x\right)$

Từ đó suy ra: $Q=\left(x^2+2x-2\right)\left(x^2-3x-2\right)$

5.15. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a) $A=x\left(x+4\right)\left(x+6\right)\left(x+10\right)+128$;

b) $\left(x-y\right)^5+\left(y-z\right)^5+\left(z-x\right)^5$.

c) $P=2x^4-3x^3-7x^2+6x+8$;

d) $\left(x+a\right)\left(x+2a\right)\left(x+3a\right)\left(x+4x\right)+a^4$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có: $A=\left(x^2+10x\right)\left(x^2+10x+24\right)+128$

Đặt $y=x^2+10x+12$, đa thức có dạng:

$A=\left(y-12\right)\left(y+12\right)+128=y^2-144+128$

$=y^2-16=\left(y+4\right)\left(y-4\right)$

Từ đó suy ra: $A=\left(x^2+10x+16\right)\left(x^2+10x+8\right)=\left(x+2\right)\left(x+8\right)\left(x^2+10x+8\right)$

b) Đặt $x-y=a; y-z=b$. Đa thức có dạng:

$a^5+b^5-\left(a+b\right)^5=a^5+b^5-a^5-5a^4b-10a^3b^2-10a^2b^3-5ab^4-b^5$

$=-5ab\left(a^2+2a^2b+2ab^2+b^3\right)$

$=-5ab\left(a^3+a^2b+a^2b+ab^3+ab^3+b^3\right)$

$=-5ab\left(a+b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)$

Từ đó suy ra

$-5\left(x-y\right)\left(y-z\right)\left[\left(x-y\right)^2+\left(x-y\right)\left(y-z\right)+\left(y-z\right)^2\right]$

$=5\left(x-y\right)\left(y-z\right)\left(z-x\right)\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right)$

c) $P=\left(2x^4-8x^2+8\right)-\left(3x^3-6x\right)+x^2$

$=2\left(x^4-4x^2+4\right)-3x\left(x^2-2\right)+x^2$

$=2\left(x^2-2\right)^2-3x\left(x^2-2\right)+x^2$

Đặt $x^2-2=a$, đa thức có dạng:

$P = 2a^2 - 3ax + x^2 = 2a^2 - 2ax - ax + x^2 = (a - x)(2a - x)$

Từ đó suy ra

$P = (x^2 - 2 - x)(2x^2 - 4 - x) = (x^2 + x - 2x - 2)(2x^2 - x - 4)$

$= (x+1)(x-2)(2x^2 - x - 4)$

d) $(x+a)(x+4a)(x+3a)(x+2a) + a^4$

$= (x^2 + 5ax + 4a^2)(x^2 + 5ax + 6a^2) + a^4$

Đặt $x^2 + 5ax + 5a^2 = y$ đa thức có dạng

$(y - a^2)(y + a^2) + a^4 = y^2 - a^4 + a^4 = y^2$

Từ đó suy ra: $(x^2 + 5ax + 5a^2)^2$

5.16. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a) $M = (a+b+c)^3 - (a+b-c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3$.

b) $N = (a^2 + b^2)^3 + (c^2 - a^2)^3 - (b^2 + c^2)^3$.

c) $P = (x - 2y + 3z)^3 - x^3 + 8y^3 - 27z^3$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Đặt $a+b-c = x; b+c-a = y; c+a-b = z$

Đa thức có dạng: $M = (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$

$M = (x+y)^3 + 3(x+y)^2 z + 3(x+y)z^2 + z^3 - x^3 - y^3 - z^3$

$= x^3 + y^3 + 3xy(x+y) + 3(x+y)^2 z + 3(x+y)z^2 - x^2 - y^2$

$= 3(x+y)(xy + xz + yz + z^2) = 3(x+y)(x+z)(y+z)$

$\Rightarrow M = 3.2c.2a.2b = 24abc$

b) Đặt $a^2 + b^2 = x; c^2 - a^2 = y \Rightarrow b^2 + c^2 = x + y$

Đa thức có dạng:

$N = x^3 + y^3 - (x+y)^3 = x^3 + y^3 - x^3 - y^3 - 3xy(x+y) = -3xy(x+y)$

$\Rightarrow N = -3(a^2 + b^2)(c^2 - a^2)(b^2 + c^2)$

hay $N = 3(a^2 + b^2)(a^2 - c^2)(b^2 + c^2)$

c) Đặt $x = a; -2y = b; 3z = c$. Đa thức có dạng:

$P = (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a)$

$\Rightarrow P = 3(x-2y)(3z-2y)(x+3z)$

5.17. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a) $A = 2x^4 - x^3y + 3x^2y^2 - xy^3 + 2y^4$.

b) $B = (x-18)(x-7)(x+35)(x+90) - 67x^2$.

c) $C = (4x-2)(10x+4)(5x+7)(2x+1) + 17$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $A = 2x^4 + 4x^2y^2 + 2y^4 - xy(x^2+y^2) - x^2y^2$

$= 2(x^2+y^2)^2 - xy(x^2+y^2) - x^2y^2$

Đặt $x^2 + y^2 = a; xy = b$ đa thức có dạng:

$A = 2a^2 - ab - b^2 = 2a^2 - 2ab + ab - b^2 = (a-b)(2a+b)$

$\Rightarrow A = (x^2 + y^2 - xy)(2x^2 + 2y^2 + xy)$

b) $B = (x-18)(x+35)(x-7)(x+90) - 67x^2$

$= (x^2 - 17x - 630)(x^2 - 83x - 630) - 67x^2$

Đặt $x^2 - 50x - 630 = y$. Đa thức có dạng:

$B = (y+33x)(y-33x) - 67x^2$

$= y^2 - 1089x^2 - 67x^2$

$= y^2 - 1156x^2 = (y-34)(y+34)$

$\Rightarrow B = (x^2 - 50x - 630 - 34x)(x^2 - 50x - 630 + 34x)$

$B = (x^2 - 84x - 630)(x^2 - 16x - 630)$

c) $C = (4x-2)(5x+7)(10x+4)(2x+1) + 17$

$= (20x^2 + 18x - 14)(20x^2 + 18x + 4) + 17$

Đặt $20x^2 + 18x - 5 = y$. Đa thức có dạng:

$C = (y-9)(y+9) + 17 = y^2 - 81 + 17 = y^2 - 64 = (y-8)(y+8)$

$\Rightarrow B = (20x^2 + 18x - 5 - 8)(20x^2 + 18x - 5 + 8)$

$\Rightarrow B = (20x^2 + 18x - 13)(20x^2 + 18x + 3)$

Phương pháp đồng nhất hệ số

5.18. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a) $Q = x^4 - 8x^2 - x + 12$

b) $R = x^4 + x^3 + x^2 + x + 12$

c) $S = x^4 - 8x + 63$

d) $F = x^2 + 2xy - 8y^2 + 2x + 14y - 3$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $Q = x^4 - 8x^2 - x + 12$

Các số $\pm1; \pm3, \pm4; \pm6; \pm12$ không phải là nghiệm của đa thức R nên R không có nghiệm nguyên, R cũng không có nghiệm hữu tỷ. Như vậy nếu R phân tích được thành nhân tử thì phải có dạng:

$\left(x^2 + ax + b\right)\left(x^2 + cx + d\right)$, với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Khai triển dạng này ra, ta được đa thức: $x^4 + \left(a + c\right)x^3 + \left(ac + b + d\right)x^2 + \left(ad + bc\right)x + bd$. Đồng nhất đa thức này với $f\left(x\right)$ ta được hệ điều kiện:

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ ac + b + d = -8 \\ ad + bc = -1 \\ bd = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \\ c = 1 \\ d = -3 \end{cases}$$

Ta có: $Q = \left(x^2 - x - 4\right)\left(x^2 + x - 3\right)$

b) Các số $\pm1; \pm3, \pm4; \pm6; \pm12$ không phải là nghiệm của đa thức R nên R không có nghiệm nguyên, R cũng không có nghiệm hữu tỷ. Như vậy nếu R phân tích được thành nhân tử thì phải có dạng:

$\left(x^2 + ax + b\right)\left(x^2 + cx + d\right)$, với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Khai triển dạng này ra, ta được đa thức: $x^4 + \left(a + c\right)x^3 + \left(ac + b + d\right)x^2 + \left(ad + bc\right)x + bd$. Đồng nhất đa thức này với $f\left(x\right)$ ta được hệ điều kiện:

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ ac + b + d = 1 \\ ad + bc = 1 \\ bd = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \\ c = 3 \\ d = 4 \end{cases}$$

Vậy: $R = \left(x^2 - 2x + 3\right)\left(x^2 + 3x + 4\right)$

c) Các số $\pm1; \pm3, \pm7; \pm9; \pm21; \pm63$ không phải là nghiệm của đa thức S nên S không có nghiệm nguyên, S cũng không có nghiệm hữu tỷ. Như vậy nếu S phân tích được thành nhân tử thì phải có dạng:

$\left(x^2 + ax + b\right)\left(x^2 + cx + d\right)$, với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Khai triển dạng này ra, ta được đa thức: $x^4 + \left(a + c\right)x^3 + \left(ac + b + d\right)x^2 + \left(ad + bc\right)x + bd$. Đồng nhất đa thức này với $f\left(x\right)$ ta được hệ điều kiện:

$$\begin{cases} a+c=0 \\ ac+b+d=0 \\ ad+bc=-8 \\ bd=63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=7 \\ c=4 \\ d=9 \end{cases}$$

Ta có: $S=\left(x^2-4x+7\right)\left(x^2+4x+9\right)$

d) Ta có: $F=x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3=(x+4y)(x-2y)+2x+14y-3$

Giả sử:

$F=\left(x+4y\right)\left(x-2y\right)+2x+14y-3=\left(x+4y+a\right)\left(x-2y+b\right)$ với mọi x, y

$\Leftrightarrow a\left(x-2y\right)+b\left(x+4y\right)+ab=2x+14y-3$ đúng với mọi x, y

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ 4b-2a=14 \\ ab=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \end{cases}$$

$F=\left(x+4y-1\right)\left(x-2y+3\right)$

Phương pháp xét giá trị riêng của biến

5.19. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a) $A=\left(x+y+z\right)^5-x^5-y^5-z^5$

b) $B=x\left(y-z\right)^3+y\left(z-x\right)^3+z\left(x-y\right)^3$

c) $C=\left(b+c\right)\left(a-b\right)\left(a-c\right)+\left(c+a\right)\left(b-c\right)\left(b-a\right)+\left(a+b\right)\left(c-a\right)\left(c-b\right)+8abc$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Sử dụng phương pháp xét giá trị riêng, ta nhận được đa thức có nhân tử là $x+y, y+z, z+x$. Do vậy khi phân tích ta định hướng có nhân tử trên.

$A=\left(x+y+z\right)^5-x^5-y^5-z^5$

$=\left(x+y\right)^5+5\left(x+y\right)^4z+10\left(x+y\right)^3z^2+10\left(x+y\right)^2z^3+5\left(x+y\right)z^4+z^5-z^5-y^5-z^5$

$=\left(x+y\right)^5+5\left(x+y\right)^4z+10\left(x+y\right)^3z^2+10\left(x+y\right)^2z^3+5\left(x+y\right)z^4-$

$\left(x+y\right)\left(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4\right)$

$=\left(x+y\right)[(x+y)^4+5(x+y)^3z+10(x+y)^2z^2+10(x+y)z^3+5z^4-x^4+x^3y-x^2y^2+xy^3-y^4]$

$=\left(x+y\right)[x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4+5\left(x+y\right)^3z+10\left(x+y\right)^2z^2+$

$10\left(x+y\right)z^3+5z^4-x^4+x^3y-x^2y^2+xy^3-y^4]$

$=\left(x+y\right)\left[5x^3y+5x^2y^2+5xy^3+5\left(x+y\right)^3z+10\left(x+y\right)^2z^2+10\left(x+y\right)z^3+5z^4\right]$

$= 5(x+y)[x^3y + x^2y^2 + xy^3 + x^3z + 3x^2yz + 3xy^2z + y^3z + 2x^2z^2 + 4xyz^2 +$

$2y^2z^2 + 2xz^3 + 2yz^3 + z^4]$

$= 5(x+y)[(x^3y + x^3z) + (x^2y^2 + x^2yz) + (2x^2yz + 2x^2z^2) + (xy^3z + xy^2z) +$

$(2xy^2z + 2xyz^2) + (2xyz^2 + 2xz^3) + (y^3z + y^2z^2) + (y^2z^2 + yz^3) + (yz^3 + z^4)$

$= 5(x+y)(y+z)\left[x^3 + x^2y + 2x^2z + xy^2 + 2xyz + 2xz^2 + y^2z + yz^2 + z^3\right]$

$= 5(x+y)(y+z)\left[(x^3 + x^2z) + (x^2z + 2xz^2 + z^3) + (x^2y + 2xyz + yz^2) + (xy^2 + y^2z)\right]$

$= 5(x+y)(y+z)(x+z)(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)$

b) *Nhận xét.* Với $x = y$ thì $B = 0$, cho nên $x - y$ là một nhân tử của B. Do vai trò bình đẳng của x, y, z nên $y - z$ và $z - x$ cũng là nhân tử của B, mà B có bậc 4 đối với tập hợp các biến nên

$B = k.(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$.

Chọn $x = 0, y = 1, z = 2$ được $k = 1$. Vậy $B = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$.

c) *Nhận xét.* Với $a = -b$ thì $c = 0$, cho nên $a + b$ là một nhân tử của C. Do vai trò bình đẳng của a, b, c nên $b + c$ và $c + a$ cũng lằ nhân tử của C, mà C có bậc 3 đối với tập hợp các biến nên $C = k(a+b)(b+c)(c+a)$

Chọn $a = b = c = 1$ được $k = 1$. Vậy $C = (a+b)(b+c)(c+a)$.

Chuyên đề 6. SỐ CHÍNH PHƯƠNG

A. Kiến thức cần nhớ

1. Khái niệm Số chính phương là bình phương của một số tự nhiên.

2. Tính chất.

Số chính phương chỉ có thể tận cùng bằng 0, 1,4, 5, 6, 9 không thể tận cùng bằng 2, 3, 7, 8.

Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với mũ chẵn, không chứa thừa số nguyên tố với số mũ lẻ.

Hệ quả. Số chính phương chia hết cho số nguyên tố P thì phải chia hết cho P^2

Một số chính phương khi và chỉ khi số ước của nó là số lẻ.

3. Một số kiến thức khi sử dụng

Hệ thập phân

$$\underbrace{99.....9}_{n\text{ số}} = 10^n - 1 \Rightarrow \underbrace{11.....1}_{n\text{ số}} = \frac{10^n - 1}{9}$$

$$\underbrace{\overline{aa.....a}}_{n\text{ số}} = \frac{a(10^n - 1)}{9}$$

Các hằng đẳng thức.

Nếu a = b.c mà a là số chính phương; (b; c) = 1 thì b và c đều là số chính phương.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho $A = \underbrace{11.....1}_{2n\text{ số }1}$; $B = \underbrace{11.....1}_{n+1\text{ số }1}$; $C = \underbrace{66.....6}_{n\text{ số }6}$; với n là số tự nhiên lớn hơn 1.

Chứng minh rằng $A + B + C + 8$ là số chính phương.

Giải

Tìm cách giải. Để chứng minh $A + B + C + 8$ là số chính phương, chúng ta cần biến đổi thành bình phương một số tự nhiên. Suy luận rất tự nhiên là dùng hệ thập phân, để đưa chúng về lũy thừa của 10 bằng công thức $\underbrace{11.....1}_{n\text{ số}} = \frac{10^n - 1}{9}$ và $\underbrace{\overline{aa.....a}}_{n\text{ số}} = \frac{a\left(10^n - 1\right)}{9}$ sau đó dùng hằng đẳng thức đưa về bình phương của một số tự nhiên.

Trình bày lời giải

Ta có $A = \frac{10^{2n} - 1}{9}; B = \frac{10^{n+1} - 1}{9}; C = \frac{6\left(10^n - 1\right)}{9}$

Xét $A + B + C + 8 =$

$$\frac{10^{2n} - 1}{9} + \frac{10^{n+1} - 1}{9} + \frac{6.10^n - 6.1}{9} + 8 = \frac{10^{2n} + 16.10^n + 64}{9} = \left(\frac{10^n + 8}{3}\right)^2$$

Mà $10^n + 8 = \underbrace{100..0}_{n-1}8 \vdots 3 \Rightarrow A + B + C + 8$ là số chính phương.

Ví dụ 2: Tìm số tự nhiên n để $n + 18$ và $n - 41$ là các số chính phương.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Quảng Ngãi, năm học 2012 - 2013)

Giải

Tìm cách giải. Để tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện trên, chúng ta đồng nhất hai điều kiện đó bằng cách đặt $n + 18 = a^2; n - 41 = b^2\left(a; b \in \mathbb{N}; a > b\right)$. Sau đó khử n bằng phép trừ vế cho vế, khi đó ta sẽ tìm được số tự nhiên a, b bằng con đường ước số.

Trình bày lời giải

Đặt $n + 18 = a^2; n - 41 = b^2\left(a; b \in \mathbb{N}; a > b\right)$

Suy ra $a^2 - b^2 = 59 \Leftrightarrow \left(a - b\right)\left(a + b\right) = 59 = 1.59$

Do đó $\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 30 \\ b = 29 \end{cases} \Leftrightarrow n = 882$.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $n^2 + n + 1$ không là số chính phương.

Giải

Tìm cách giải. Để chứng tỏ một số không phải là số chính phương, chúng ta thường có hai cách: hoặc sử dụng chữ số tận cùng hoặc chứng minh số đó nằm giữa hai số chính phương liên tiếp. Trong ví dụ này chúng ta vận dụng cách hai.

Trình bày lời giải

Với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có: $n^2 < n^2 + n + 1 < \left(n + 1\right)^2$ mà n^2 và $\left(n + 1\right)^2$ là hai số chính phương liên tiếp. Vậy $n^2 + n + 1$ không phải số chính phương.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng nếu $m.n \in \mathbb{Z}$ thoả mãn đẳng thức: $3m^2 + m = 4n^2 + n$ thì $m - n$ và $4m + 4n + 1$ đều là số chính phương.

Giải

Tìm cách giải. Nếu $m - n$ và $4m + 4n + 1$ đều là số chính phương thì $\left(m - n\right)\left(4m + 4n + 1\right)$ cũng là số chính phương. Khi khai triển đẳng thức này cho chúng ta bóng dáng của giả thiết. Do vậy với suy nghĩ ấy chúng ta cần:

- Từ giả thiết biến đổi $\left(m - n\right)\left(4m + 4n + 1\right)$ thành số chính phương.
- Chứng minh rằng $m - n$ và $4m + 4n + 1$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Trình bày lời giải

Từ $3m^2 + m = 4n^2 + n$ ta có $m \geq n$ và

$\Leftrightarrow 4\left(m^2 - n^2\right) + m - n = m^2$

$\Leftrightarrow (m-n)(4m+4n+1) = m^2 \quad (*)$

Đặt $(m-n; 4m+4n+1) = d$

$\Rightarrow (m-n) \vdots d; (4m+4n+1) \vdots d$ và $m \vdots d$

$\Rightarrow \{4m+4n+1+4(m-n)\} \vdots d \Rightarrow (8m+1) \vdots d$ mà $m \vdots d$

$\Rightarrow 1 \vdots d$ hay $d = 1$

Vậy $m-n$ và $4m+4n+1$ nguyên tố cùng nhau, kết hợp với (*) ta có: $m-n$ và $4m+4n+1$ đều là số chính phương.

Ví dụ 5: Cho x, y là những số nguyên lớn hơn 1 sao cho $4x^2y^2 - 7x + 7y$ là số chính phương. Chứng minh rằng $x = y$.

Giải

Tìm cách giải. Nếu $x = y$ thì $4x^2y^2 - 7x + 7y = 4x^2y^2$ là số chính phương. Do $(2xy-1)^2; 4x^2y^2; (2xy+1)^2$ là ba số chính phương liên tiếp nên để có:

$4x^2y^2 - 7x + 7y = 4x^2y^2$ ta chỉ cần chứng minh $(2xy-1)^2 < 4x^2y^2 - 7x + 7y < (2xy+1)^2$ là đủ.

Trình bày lời giải

Do x, y là các số nguyên lớn hơn 1 nên $x; y \geq 2$

$\Rightarrow -4xy + 1 < -7x + 7y < 4xy + 1$

$\Rightarrow 4x^2y^2 - 4xy + 1 < 4x^2y^2 - 7x + 7y < 4x^2y^2 + 4xy + 1$

$\Rightarrow (2xy-1)^2 < 4x^2y^2 - 7x + 7y < (2xy+1)^2$

Suy ra $4x^2y^2 - 7x + 7y$ là số chính phương. Ta có $x; y \geq 2$ nên

$1 < 2xy - 1 < 2xy + 1$. Do đó: $4x^2y^2 - 7x + 7y = (2xy)^2 \Leftrightarrow x = y$

Ví dụ 6: Giả sử a là số nguyên dương và d là một ước số nguyên dương của $2a^2$. Chứng minh rằng: $a^2 + d$ không thể là số chính phương.

Giải

Giả sử $2.a^2 = k.d$ và $a^2 + d = b^2$ với $a, b, k, d \in \mathbb{Z}^+$.

Từ $a^2 + d = b^2 \Leftrightarrow a^2 + \dfrac{2^2}{k} = b^2 \Leftrightarrow k^2b^2 = a^2(k^2 + 2.k)$

$\Leftrightarrow (kb)^2 = a^2(k^2 + 2k) \Leftrightarrow k^2 + 2k$ là số chính phương.

Mà $k^2 < k^2 + 2k < (k+1)^2 \Rightarrow k^2 + 2k$ không thể là số chính phương

Vậy $a^2 + d$ không thể là số chính phương.

Ví dụ 7: Chứng minh rằng với x, y là hai số tự nhiên thỏa mãn x^2+2y là số chính phương thì x^2+2y là tổng của hai số chính phương

Giải

Vì $x, y \in \mathbb{N}$ nên $x^2+2y > x^2$. Do x^2+2y là số chính phương ta có:

$x^2+2y=(x+t)^2$ với $t \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow 2y = t^2+2tx \Rightarrow t = 2K, K \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 2y = 4K^2+4Kx$

$\Leftrightarrow y = 2K^2+2Kx$

$\Leftrightarrow x^2+y = K^2+(x+K)^2$ điều phải chứng minh.

Ví dụ 8: Cho $x, y, z \in \mathbb{N}^+$ nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$. Hỏi $x+y$ có phải là số chính phương không?

Giải

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z} \Leftrightarrow (x+y).z = xy \Leftrightarrow xz+yz-zy=0$

Hay $xy-xz+z^2-yz=z^2 \Leftrightarrow (x-z)(y-z)=z^2$

Nếu $(x-z);(y-z)=d \neq 1 \Rightarrow z^2 \vdots d^2$ (vô lí) $\Rightarrow (x-z;y-z)=1$

Hay $x-z$ và $y-z$ là các số chính phương

$\Rightarrow x-z=K^2$

$y-z=m^2$ (với $K, m \in \mathbb{N}^*$) $\Rightarrow z^2 = K^2.m^2 \Rightarrow z = Km$

Vậy $x+y = x-z+y-z+2z$

$=K^2+m^2+2Km$

$x+y=(K+m)^2$

Vậy $x+y$ là số chính phương

C.Bài tập vận dụng

6.1. Chứng minh rằng số $A = 224\underbrace{99.....9}_{n-2 \text{ số } 9}1\underbrace{00.....09}_{n \text{ số } 0}$ là số chính phương $(n \geq 2)$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có:

$A = 224\underbrace{99.....9}_{n-2}\underbrace{00.....0}_{n+2}+10^{n+1}+9$

$A = 224\underbrace{99.....9}_{n-2}\times 10^{n+2}+10^{n+1}+9$

$$A = \left(225\underbrace{00.....0}_{n-2} - 1\right) \times 10^{n+2} + 10^{n+1} + 9$$

$$A = \left(225.10^{n-2} - 1\right).10^{n+2} + 10^{n+1} + 9$$

$$A = 225.10^{2n} - 10^{n+2} + 10^{n+1} + 9$$

$$A = 225.10^{2n} - 90.10^{n} + 9$$

$A = \left(15,10^{n} - 3\right)^2$ số chính phương

6.2. Cho số nguyên dương n. Đặt $A = \underbrace{44.....4}_{2n}$; $B = \underbrace{88.....8}_{n}$

Chứng minh rằng $A + 2.B + 4$ là số chính phương

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $A = \underbrace{44.....4}_{2n} = 4.\underbrace{11.....1}_{2n} = 4.\dfrac{10^{2n} - 1}{9}$

$B = \underbrace{88.....8}_{n} = 8..\underbrace{11.....1}_{2n} = 8.\dfrac{10^{n} - 1}{9}$

Xét $A + 2B + 4 = \dfrac{4\left(10^{2n} - 1\right)}{9} + \dfrac{2.8\left(10^{n} - 1\right)}{9} + 4$

$= \dfrac{4.10^{2n} - 4.16.10^{n} - 16 + 36}{9}$

$= \dfrac{4.\left(10^{2n} - 4.10^{n} + 4\right)}{9} = \left[\dfrac{2\left(10^{n} + 2\right)}{3}\right]^2 = \underbrace{\left(66...68\right)^2}_{n-1}$

Ta có điều phải chứng minh.

6.3. Cho $a = \underbrace{11.....1}_{2n}$; $b = \underbrace{44.....4}_{n}$. Chứng minh rằng $a + b + 1$ là số chính phương.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $a = \dfrac{10^{2n} - 1}{9}; b = \dfrac{4\left(10^{n} - 1\right)}{9}$

Đặt $10^{n} = x \Rightarrow a = \dfrac{x^2 - 1}{9}; b = \dfrac{4\left(x - 1\right)}{9}$

$$a + b + 1 = \frac{x^2 - 1 + 4x - 4 + 9}{9} = \left(\frac{x + 2}{3}\right)^2$$

Mà $x + 2 = 10...02 \vdots 3 \Rightarrow a + b + 1$ là số chính phương.

6.4. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2 - 14n - 256$ là số chính phương.

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $n^2-14n-256=k^2$ với $k\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow(n-7)^2-305=k^2\Rightarrow(n-7)^2-k^2=305\Rightarrow(n-k-7)(n+k-7)=305$

$\Rightarrow n-k-7;n+k-7\in Ư(305)=\{\pm1;\pm5;\pm61;\pm305\}$

Mà $n-k-7<n+k-7$ nên ta có:

$n-k-7$	-305	-61	5	1
$n+k-7$	-1	-5	61	305

Suy ra

n	40	160
k	28	152

Vậy với $n\in\{40;160\}$ thì $n^2-14n-256$ là số chính phương.

6.5. Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn n^2+2018 là số chính phương.

Hướng dẫn giải – đáp số

Giả sử tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn đề bài. Đặt $n^2+2018=m^2$ $(n\in\mathbb{N})$ $\Rightarrow(m-n)(m+n)=2018$ (*)

Khi đó:

+ Nếu m và n khác tính chẵn lẻ thì $(m-n)(m+n)$ lẻ, mâu thuẫn với (*).

+ Nếu m và n cùng tính chẵn lẻ thì $(m-n)(m+n)$ chia hết cho 4, mâu thuẫn với (*).

Vậy không tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn n^2+2018 là số chính phương.

6.6. Chứng minh rằng có thể biểu diễn lập phương của một số nguyên dương bất kì dưới dạng hiệu của hai số chính phương.

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt a là số nguyên dương bất kì.

Xét a chẵn. Đặt $a=2n$ $(n\in\mathbb{Z}^+)$

Ta có: $a^3=8n^3=n^2\left[(2n+1)^2-(2n-1)^2\right]$

$=(2n^2+n)^2-(2n^2-n)^2$ (1)

Xét a lẻ. Đặt $a=2n+1$ $(n\in\mathbb{Z})$

Ta có: $a^3=(2n+1)^3=(2n+1)^2\left[(n+1)^2-n^2\right]$

$=(2n^2+3n+1)^2-(2n^2+n)^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

6.7. Cho a, b, c, d là các số nguyên thỏa mãn $a\le b\le c\le d$ và $a+d=b+c$.

Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2+d^2$ là tổng của ba số chính phương.

Hướng dẫn giải – đáp số

Vì $a \le b \le c \le d$ nên ta có thể đặt $a = b - k$ và $a = c + h$ (vì $h.k \in \mathbb{Z}$)

Khi đó $a + d = b + c \Leftrightarrow b - k + c + h = b + c \Rightarrow h = k$

Vậy $a = b - k$ và $d = c + k$

Do đó: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (b-k)^2 + b^2 + c^2 + (c+k)^2$

$= 2b^2 + 2c^2 + 2k^2 - 2bk + 2ck$

$= b^2 + 2bc + c^2 + b^2 + c^2 + k^2 - 2bc - 2bk + 2ck + k^2$

$= (b+c)^2 + (b-c-k)^2 + k^2$

Đó là tổng của ba số chính phương.

6.8. Cho hàm số $f(x) = (x+2)(x+3)(x+4)(x+5) + 1$.

Chứng minh rằng $f(x)$ luôn có giá trị là số chính phương với mọi giá trị nguyên của x.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Lâm Đồng, năm học 2012 - 2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có:

$f(x) = (x+2)(x+5)(x+3)(x+4) + 1$

$= (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12) + 1$

$= (x^2 + 7x + 10)^2 + 2(x^2 + 7x + 10) + 1$

$= (x^2 + 7x + 10 + 1)^2 = (x^2 + 7x + 11)^2$

Với x là số nguyên thì $x^2 + 7x + 11$ là số nguyên.

Vậy $f(x)$ luôn có giá trị là sổ chính phương.

6.9. Chứng minh rằng:

a) Với mọi số tự nhiên $n > 1$ thì $n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ không phải số chính phương.

b) Các số a và b đều là tổng 2 số chính phương thì tích ab cũng là tổng của 2 số chính phương.

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Nghệ An, năm học 2006 - 2007)

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Giả sử A là số chính phương. Đặt $A = k^2$ với k là số nguyên.

Ta có: $A = n^4(n-1)(n+1) + 2n^2(n+1)$

$= (n+1)n^2(n^3 - n + 2) = (n+1)n^2\left[n^3 + n^2 - 2n^2 + 2\right]$

$= (n+1)n^2\left[(n+1)(n^2 - 2n + 2)\right] = (n+1)^2 n^2\left[(n-1)^2 + 1\right]$

Suy ra $(n+1)^2 n^2\left[(n-1)^2+1\right]=k^2$ nên $(n-1)^2+1$ là số chính phương.

Mà $(n-1)^2+1<n^2 \Rightarrow (n-1)^2+1$ không phải số chính phương.

Vậy A không phải số chính phương.

b) Giả sử $a=m^2+n^2; b=p^2+q^2\ \ (m,n,p,q\in\mathbb{Z})$, khi đó:

$ab=(m^2+n^2)(p^2+q^2)=m^2p^2+m^2q^2+n^2p^2+n^2q^2$

$=m^2p^2-2mnpq+n^2q^2+m^2q^2+2mnpq+n^2q^2$

$ab=(mp+nq)^2+(mq-np)^2$, ta có điều phải chứng minh.

6.10. Tìm số tự nhiên n để $n+5$ và $n+30$ là các số chính phương.

(Tuyển sinh lớp 10, Trường THPT Chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, năm học 2015 - 2016)

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $n+5=a^2; n+30=b^2$ (với $a,b\in\mathbb{N}$) $\Rightarrow a<b$

$\Rightarrow b^2-a^2=25 \Leftrightarrow (b-a)(b+a)=25=1.25$ vì $b-a<b+a$

Từ đó ta có hệ: $\begin{cases} b-a=1 \\ b+a=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=12 \\ b=13 \end{cases} \Leftrightarrow n=139$

6.11. Cho hai số tự nhiên a và b. Chứng minh rằng nếu tích a.b là số chẵn thì luôn luôn tìm được số nguyên c sao cho $a^2+b^2+c^2$ là số chính phương.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có a.b là số chẵn, xảy ra hai trường hợp.

- *Trường hợp 1.* Nếu hai số cùng chẵn thì $a^2+b^2 \vdots 4$.

Đặt $a^2+b^2=4k\ \ (k\in\mathbb{N})$. Khi đó, chọn $c=k-1$.

Ta có $a^2+b^2+c^2=4k+(k-1)^2=(k+1)^2$.

- *Trường hợp 2.* Nếu một số chẵn, một số lẻ thì ta đặt $a^2+b^2=2k+1\ \ (k\in\mathbb{N})$. Khi đó, chọn $c=k^2$.

Ta có $a^2+b^2+c^2=(k+1)^2$.

Vậy luôn chọn được số c sao cho $a^2+b^2+c^2$ là số chính phương.

6.12.

a) Tìm số tự nhiên sao cho x^2+21 là số chính phương.

b) Chứng minh rằng nếu m, n là 2 số chính phương lẻ liên tiếp thì $(m-1)(n-1)$ chia hết cho 192.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Đặt $x^2+21=k^2\ (k\in\mathbb{Z})\ \Rightarrow (k-x)(k+x)=21 \Rightarrow k-x; k+x \in Ư(21)$

Mà $Ư(21) = \{\pm1; \pm3; \pm7; \pm21\}$

Bạn đọc tự giải được $x = 2$ và $x = 10$.

b) Đặt $m = (2k+1)^2; n = (2k+3)^2 \ (k \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow (m-1)(n-1) = \left[(2k+1)^2 - 1\right]\left[(2k+3)^2 - 1\right] = 16k(k+1)^2(k+2)$ Ta có 16 chia hết cho 16.

- Nếu k lẻ thì $(k+1)^2$ chia hết cho 4.

- Nếu k chẵn thì $k(k+2)$ chia hết cho 4.

$k, k+1, k+2$ là ba số liên tiếp nên $k(k+1)(k+2)$ chia hết cho 3.

$16k(k+1)^2(k+2) \vdots 192$. Ta có điều phải chứng minh.

6.13. Tìm $x \in \mathbb{Q}$ để $x^2 + x + 6$ là một số chính phương.

Hướng dẫn giải – đáp số

* Với $x \in \{0; 1; -1\} \Rightarrow$ không thỏa mãn.

* Với $x \notin \{0; 1; -1\} \Rightarrow$. Trước hết ta chứng minh nếu $x^2 + x + 6$ là một số chính phương thì $x \in \mathbb{Z}$.

Giả sử $x = \dfrac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Z}; n > 0; (m, n) = 1$

Ta có: $x^2 + x = \dfrac{m^2}{n^2} + \dfrac{m}{n} = \dfrac{m^2 + mn}{n^2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m^2 + mn \vdots n^2$

$\Rightarrow m^2 + mn \vdots n \Rightarrow m^2 \vdots n$. Do $(m; n) = 1 \Rightarrow n = 1 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$

Đặt $x^2 + x + 6 = k^2 \ (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow 4x^2 + 4x + 24 = 4k^2 \Leftrightarrow (2x+1)^2 + 23$

$\Leftrightarrow 4k^2 - (2x+1)^2 = 23 \Leftrightarrow (2k + 2x + 1)(2k - 2x - 1) = 23 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2k + 2x + 1 \\ 2k - 2x - 1 \end{array}\right.$

$Ư(23) = \{\pm1; \pm23\}$

Bạn đọc tự giải được $x = x - 6$ và $x = 5$

6.14. Tìm số nguyên dương n để tổng $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ là số chính phương.

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 = k^2$ (1) với k nguyên dương, ta có:

$(1) \Leftrightarrow 4n^4 + 4n^3 + 4n^2 + 4n + 1 = 4k^2$

$\Leftrightarrow (2n^2 + n)^2 + 2n^2 + (n+2)^2 = (2k)^2$ (2)

Cách 1. Từ (2) $\Rightarrow (2k)^2 > (2n^2+n)^2 \Rightarrow (2k)^2 \geq (2n^2+n+1)^2$

Do k, n nguyên dương

$\Rightarrow 4n^4+4n^3+4n^2+4n+4 \geq (2n^2+n+1)^2$

$\Leftrightarrow (n+1)(n-3) \leq 0 \Leftrightarrow n \leq 3 \Rightarrow n \in \{1;2;3\}$

Thay vào (1) thử lại, ta được kết quả duy nhất $n=3$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Cách 2. Xét hiệu $A = (2n^2+n+2)^2 - (2k)^2 = 5n^2 > 0$

$\Rightarrow (2n^2+n+2)^2 > (2k)^2 \quad (3)$

Từ (2) và (3) suy ra: $\Rightarrow (2n^2+n+2)^2 > (2k)^2 > (2n^2+n)^2$

$\Rightarrow (2k)^2 = (2n^2+n+1)^2$ do k, n nguyên dương

$\Leftrightarrow (n+1)(n-3) = 0 \Leftrightarrow n-3=0 \Leftrightarrow n=3$

Khi đó $n^4+n^3+n^2+n+1 = 121 = 11^2$

6.15. Nếu $a,b \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn $2a^2+a=3b^2+b$ thì $a-b$ và $2a+2b+1$ là những số chính phương.

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ $2a^2+a=3b^2+b$ ta có $a>b$ và

$\Leftrightarrow 2(a^2-b^2)+a-b=b^2$

$\Leftrightarrow (a-b)(2a+2b+1)=b^2 \quad (*)$

Đặt $(a-b;2a+2b+1)=d \Rightarrow (a-b)\vdots d; (2a+2b+1)\vdots d$ và $b \vdots d$

$\Rightarrow \{2a+2b+1-2(a-b)\}\vdots d \Rightarrow (4b+1)\vdots d$ mà $b\vdots d \Rightarrow 1\vdots d$ hay $d=1$

Vậy $a-b$ và $2a+2b+1$ nguyên tố cùng nhau, kết hợp với (*) ta có:

$a-b$ và $4a+4b+1$ đều là số chính phương.

Chuyên đề 7. CHIA ĐA THỨC CHO ĐA THỨC

A. Kiến thức cần nhớ

1. Chia đơn thức A cho đơn thức B

Chia hệ số của A cho hệ số của B;

Chia lũy thừa của từng biến trong A cho lũy thừa của cùng biến đó trong B;

Nhân các kết quả với nhau.

2. Chia đa thức cho đơn thức

$\left(A+B\right):C=A:C+B:C$

3. Chia đa thức A cho đa thức B

Cho A và B là hai đa thức tùy ý của cùng một biến ($B\neq 0$) khi đó tồn tại duy nhất một cặp đa thức Q và R sao cho $A=B.Q+R$, trong đó $R=0$ hoặc bậc của R nhỏ hơn bậc của B.

Q gọi là đa thức thương và R gọi là dư trong phép chia A cho B.

Nếu $R=0$ thì phép chia A cho B là phép chia hết.

4. Định lý Bézout.

Bézout là nhà toán học Pháp. Ông sinh năm 1730, mất năm 1783. Bézout quan tâm đến việc giải các hệ phương trình tuyến tính; nhằm mục đích ấy ông hệ thống hóa các phép tính về định thức. Ông cũng nghiên cứu về phép khử, nghĩa là tìm điều kiện đối với các hệ số của hai đa thức để chúng có một nghiệm chung. Ông cho xuất bản *Giáo trình Toán học* được tái bản nhiều lần ở Pháp cũng như ở nước ngoài. Trong đó có một định lý nổi tiếng mang tên ông:

Định lý. Số dư trong phép chia đa thức $f\left(x\right)$ cho $\left(x-a\right)$ đúng bằng $f\left(a\right)$.

5. Hệ quả của định lý Bézout.

Nếu a là nghiệm của đa thức $f\left(x\right)$ thì $f\left(x\right)$ chia hết cho $\left(x-a\right)$.

Người ta cũng chứng minh được rằng: Nếu đa thức $f\left(x\right)$ nhận n số nguyên khác nhau $a_1;a_2;....;a_n$ làm nghiệm thì $f\left(x\right)$ chia hết cho $\left(x-a_1\right).\left(x-a_2\right)....\left(x-a_n\right)$.

6. Phương pháp nội suy Newton

Newton là nhà Toán học, Vật lý học người Anh. Ông sinh năm 1642, mất năm 1727. Trong Toán học ông là nhà sáng lập và phát minh ra phép tính vi phân và tích phân. Ngoài ra ông có rất nhiều công trình về Toán học. Song người đời sau khi nhắc đến Newton, thường ca ngợi những phát minh của ông về vật lý học. Sau đây là phương pháp nội suy, một trong những phát hiện về toán của ông:

Để tìm đa thức $P\left(x\right)$ bậc không quá n khi biết giá trị tại $\left(n+1\right)$ điểm: $C_1;C_2;....;C_{n+1}$ ta có thể biểu diễn $P\left(x\right)$ dưới dạng:

$P\left(x\right)=b_0+b_1\left(x-C_1\right)+b_2\left(x-C_1\right)\left(x-C_2\right)+......+b_n\left(x-C_1\right)\left(x-C_2\right)....\left(x-C_n\right).$

Bằng cách thay thế x lần lượt bằng các giá trị $C_1;C_2;....;C_{n+1}$ vào biểu thức P(x) ta lần lượt tính được các hệ số $b_0;b_1;....;b_n$

7. Lược đồ Horner.

Horner là nhà toán học Anh. Ông sinh năm 1787, mất năm 1837. Ông không có nhiều công trình nhưng nổi tiếng vì một phương pháp tính gần đúng một số phương trình và bây giờ lấy tên ông đặt cho phương pháp ấy. Thực ra thuật toán đã được người Trung Hoa biết đến từ trước, nhưng Horner đã phát minh ra nó một cách độc lập. Sau đây là lược đồ Horner:

Để tìm thương và dư trong phép chia $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x^{+a}$ $(a_0\neq 0)$ cho $g(x)=x-\alpha$. Ta lập bảng:

f	a_0	a_1	$\cdots$	a_k	$\cdots$	a_n
$x=\alpha$	$b_0=a_0$	$b_1=ab_0+a_1$	$\cdots$	$b_k=ab_{k-1}+a_k$	$\cdots$	$b_n=ab_{n-1}+a_n$

Với $f(x)=(x-\alpha)q(x)+f(x);f(x)=b_n=ab_{n-1}+a_n$

$q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+...+b_{n-2}x+b_{n-1}$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Thực hiện phép chia $A:B$ trong các trường hợp sau:

a) $A=12x^3y^4$; $\quad B=-3x^2y$.

b) $A=-\dfrac{10}{3}x^6y^5z^2$; $\quad B=\dfrac{1}{9}x^2yz$.

c) $A=\left(-\dfrac{1}{2}x^ny^{n+2}\right):\left(3x^{n-2}y^n\right)$ $(n\in\mathbb{N},n\geq 2)$.

Giải

a) $A:B=12x^3y^4:(-3x^2y)=-4xy^3$;

b) $A:B=\left(-\dfrac{10}{3}x^6y^5z^2\right):\left(\dfrac{1}{9}x^2yz\right)=-30x^4y^4z$;

c) $A:B=\left(-\dfrac{1}{2}x^ny^{n+2}\right):\left(3x^{n-2}y^n\right)=\dfrac{1}{6}x^2y^2$.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng:

a) $x^8+x^4+1\,\vdots\,x^2+x+1$ $\quad$ b) $x^5+x^4+1\,\vdots\,x^2+x+1$

Giải

Tìm cách giải. Khi chứng minh đa thức $f(x)\,\vdots\,g(x)$ ta có thể:

- *Cách 1.* Phân tích đa thức $f(x)$ thành nhân tử có chứa nhân tử $g(x)$.

- *Cách 2.* Biến đổi đa thức $f(x)$ thành tổng các đa thức chia hết cho đa thức $g(x)$.

Trình bày lời giải

a) *Cách 1.* Ta có:

$$x^8+x^4+1=x^8+2x^4+1-x^4=\left(x^4+x^2\right)^2-x^4$$

$$=\left(x^4+1-x^2\right)\left(x^4+1+x^2\right)$$

$$=\left(x^4-x^2+1\right)\left(x^4+2x^2+1-x^2\right)$$

$$=\left(x^4-x^2+1\right)\left[\left(x^2+1\right)^2-x^2\right]$$

$$=\left(x^4-x^2+1\right)\left(x^2+1-x\right)\left(x^2+1+x\right)\vdots\left(x^2+x+1\right)$$

$$\Rightarrow x^8+x^4+1\vdots x^2+x+1$$

Cách 2.

$$x^8+x^4+1=x^8-x^2+x^4-x+x^2+x+1$$

$$=x^2\left(x^6-1\right)+x\left(x^3-1\right)+\left(x^2+x+1\right)$$

$$=x^2\left(x^3+1\right)\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)+x\left(x^2-1\right)\left(x^2+x+1\right)+\left(x^2+x+1\right)\vdots x^2+x+1$$

b) $x^5+x^4+1=x^5+x^4+x^3-x^3+1=x^3\left(x^2+x+1\right)-\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)$

$$=\left(x^2+x+1\right)\left(x^3-x+1\right)\vdots\left(x^2+x+1\right).$$

Ví dụ 3: Tìm các số thực a, b, sao cho đa thức $4x^4-11x^3-2ax^2+5bx-6$ chia hết cho đa thức x^2-2x-3.

(Thi học sinh giỏi lớp 9, TP Hà Nội, năm học 2012 - 2013)

Giải

Tìm cách giải. Khi tìm hệ số a, b sao cho đa thức $f\left(x\right)$ chia hết cho đa thức $g\left(x\right)$, chúng ta có hai hướng suy nghĩ:

Đặt phép chia $f\left(x\right)$ cho $g\left(x\right)$ đến khi được phần dư có bậc nhỏ hơn bậc của đa thức $g\left(x\right)$. Để phép chia hết ta đồng nhất phần dư đó với đa thức 0.

Còn nếu đa thức $g\left(x\right)$ phân tích được thành nhân tử với các nhân tử bậc nhất, ta viết $f\left(x\right)$ thành tích các nhân tử đó nhân với đa thức thương. Rồi dùng đồng nhất thức sao cho vế phải bằng 0.

Trình bày lời giải

Cách 1. Thực hiện phép chia ta được:

$$\begin{array}{llllll|l}
4x^4 & -11x^3 & -2ax^2 & +5bx & -6 & & x^2-2x-3 \\
\cline{7-7}
4x^4 & -8x^3 & -12x^2 & & & & 4x^2-3x+\left(6-a\right) \\
\cline{1-6}
 & -3x^3 & -\left(2a-12\right)x^2 & +5bx & -6 & & \\
 & -3x^3 & +6x^2 & +9x & & & \\
\cline{2-5}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l} (6-2a)x^2 \ +(5b-9)x \ \ -6 \\ \underline{(6-2a)x^2-(12-4a)x \ -(18-6a)} \\ \qquad\qquad (5b-4a+3)x+(12-6a) \end{array}$$

Để phép chia hết thì $\begin{cases} 5b-4a+3=0 \\ 12-6a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

Cách 2. Ta có: $x^2-2x-3=x^2-2x+1-4=(x-1)^2-4$

$$=(x-1-1)(x-1+2)=(x-3)(x+1)$$

Đặt thương là $q(x)$ ta có: $4x^4-11x^3-2ax^2+5bx-6=(x-3)(x+1)q(x)$

Chọn $x=3$ ta có: $4.3^4-11.3^3-2a.3^2+5.b.3-6=0$

$\Rightarrow 15b-18a=-21 \Rightarrow 5b-6a=-7$ (1)

Chọn $x=-1$ ta có: $4.(-1)^4-11.(-1)^3-2a.(-1)^2+5.b.(-1)-6=0$

$\Rightarrow 5b+2a=9$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $8a=16 \Rightarrow a=2$

Thay vào (2) $\Rightarrow 5.b+4=9 \Rightarrow b=1$.

Ví dụ 4: Tìm đa thức $f(x)$ biết:

$f(x)$ chia cho $x+3$ dư 1 ;

$f(x)$ chia cho $x-4$ dư 8;

$f(x)$ chia cho $(x+3)(x-4)$ thì được $3x$ và còn dư.

Giải

Tìm cách giải. Ta có $(x+3)(x-4)$ là tam thức bậc hai, do đó phần dư khi chia $f(x)$ chia cho $(x+3)(x-4)$ có dạng tổng quát là $ax+b$. Từ đó suy ra được: $f(x)=(x+3)(x-4)3x+ax+b$. Mặt khác ta có $f(-3)=1, f(4)=8$. Do vậy để tìm $f(x)$ chúng ta cần xác định a. b bằng cách chọn $x=-3; x=4$ để đồng nhất hai vế.

Trình bày lời giải

Theo định lý Bézout ta có $f(3)=1, f(4)=8$

Đặt dư $f(x)$ chia cho $(x+3)(x-4)$ là $ax+b$

Suy ra $f(x)=(x+3)(x-4)+ax+b$.

Với $x=-3$ tacó: $=(-3+3)(-3-4)3(-3)+a(-3)+b \Rightarrow b-3a=1$ (1)

Với $x=4$ ta có: $8=(4+3)(4-4)(3.4)+a.4+b \Rightarrow b+4a=8$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $7a=7\Rightarrow a=1$ thay vào (2) ta được $b=4$.

Từ đó ta được: $f\left(x\right)=\left(x+3\right)\left(x-4\right)3x+x+4$

Hay $f\left(x\right)=3x^3-3x^2-35x+4$

Ví dụ 5: Tìm một đa thức bậc ba, biết P(x) chia cho $\left(x-1\right)$, $\left(x-2\right)$, $\left(x-3\right)$ đều được dư 6 và $P\left(-1\right)=-18$.

Giải

Tìm cách giải. Từ đề bài theo định lí Bézout ta có $P\left(1\right)=6, P\left(2\right)=6, P\left(3\right)=6, P\left(-1\right)=-18$. Như vậy đa thức P(x) bậc ba mà biết giá trị tại bốn điểm 1; 2; 3; - 1 nên ta có thể sử dụng phương pháp nội suy Newton.

Trình bày lời giải

Theo định lý Bézout ta có: $P\left(1\right)=P\left(2\right), P\left(3\right)=6$.

Do đó ta đặt $P\left(x\right)=d+c\left(x-1\right)+b\left(x-1\right)\left(x-2\right)+a\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)$

Cho $x=1$ ta được $P\left(1\right)=d$, suy ra $d=6$

$P\left(x\right)=6+c\left(x-1\right)+b\left(x-1\right)\left(x-2\right)+a\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)$

Cho $x=2$ ta được $P\left(2\right)=6+c$, suy ra $c=0$

$P\left(x\right)=6+0\left(x-1\right)+b\left(x-1\right)\left(x-2\right)+a\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)$

Cho $x=3$ ta được $P\left(3\right)=6+2b$, suy ra $b=0$

$P\left(x\right)=6+0\left(x-1\right)+0\left(x-1\right)\left(x-2\right)+a\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)$

Do đó $P\left(x\right)=6+a\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)$.

Cho $x=-1$ ta được $P\left(-1\right)=6-24a$, do đó $-18=6-24a$ suy ra $a=1$.

Vậy $P\left(x\right)=6+1.\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)$

Rút gọn ta được: $P\left(x\right)=x^3-6x^2+11x$.

Ví dụ 6: Chứng minh rằng đa thức $f\left(x\right)=\left(x-3\right)^{200}+\left(x-2\right)^{100}-1$ chia hết cho đa thức $g\left(x\right)=x^2-5x+6$

Giải

Tìm cách giải. Đa thức $g\left(x\right)$ bậc n có n nghiệm phân biệt. Nếu mọi nghiệm của đa thức $g\left(x\right)$ cũng là nghiệm của đa thức $f\left(x\right)$ thì đa thức $f\left(x\right)$ chia hết cho đa thức $g\left(x\right)$. Nhận thấy trong bài $g\left(x\right)$ có hai nghiệm là $x=2; x=3$, nên chúng ta chỉ cần kiểm tra xem $x=2; x=3$ có là nghiệm của $f\left(x\right)$ không?

Trình bày lời giải

Ta có: $f\left(2\right)=\left(2-3\right)^{200}+\left(2-2\right)^{100}-1$ nên $f\left(x\right)\vdots\left(x-2\right)$

$f\left(3\right)=\left(3-3\right)^{200}+\left(3-2\right)^{100}-1$ nên $f\left(x\right)\vdots\left(x-3\right)$

Nên $f(x)$ chia hết cho $(x-2)(x-3)=x^2-5x+6$

Ví dụ 7: Cho $f(x)=2x^5-70x^3+4x^2-x+1$

Tìm thương và dư của phép chia $f(x)$ cho $x-6$

Giải

Tìm cách giải. Ngoài cách chia thông thường, vì đa thức chia có dạng $x-\alpha$ nên ta có thể dùng lược đồ Homer.

Trình bày lời giải

Ta có sơ đồ Horner

f	2	0	-70	4	-1	1
$\alpha=6$	2	12	2	16	95	571

Suy ra $f(x)=(x-6)g(x)+f(6)=(x-6)\left(2x^4+12x^3+2x^2+16x+95\right)+571$

Vậy thương là $g(x)=2x^4+12x^3+2x^2+16x+95$ và dư là $r=f(6)=571$

Ví dụ 8: Tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của đa thức $A=x^3+2x^2+15$ chia hết cho giá trị của đa thức $B=x+3$.

Giải

Đặt phép chia ta có:

$$\begin{array}{l|l}
x^3+2x^2\qquad+15 & x+3 \\ \cline{2-2}
x^3+3x^2 & x^2-x-3 \\ \cline{1-1}
\quad -x^2\qquad+15 & \\
\quad -x^2-3x & \\ \cline{1-1}
\qquad 3x+15 & \\
\qquad 3x+9 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 6 &
\end{array}$$

Muốn cho giá trị của A chia hết cho giá trị của B thì ta phải có $x+3x+3\in Ư(6)=\{\pm1;\pm2;\pm3;\pm6\}$.

$x+3$	1	-1	2	-2	3	-3	6	-6
x	-2	-4	-1	-5	0	-6	3	-9

Vậy với $x\in\{-2;-4;-1;-5;0;-6;3;-9\}$ thì giá trị của biểu thức A chia hết cho giá trị của biểu thức B.

Ví dụ 9: Tính giá trị biểu thức $P=28x^5-2x^4-2013x^3+14606x-3447$ khi $x^2-3x+1=0$

Giải

Tìm cách giải. Với $x^2-3x+1=0$ thì tìm x, ta được x không phải là số nguyên, nên thay vào biểu thức P để tính sẽ gặp nhiều khó khăn và có thể dẫn đến sai lầm. Do vậy chúng ta sử dụng P chia cho x^2-3x+1 được

Q(x) và phần dư R(x) khi đó, ta viết: $P(x)=(x^2-3x+1).Q(x)+R(x)$. Sau đó thay $x^2-3x+1=0$ vào biểu thức, ta tính được P(x) đơn giản hơn.

Trình bày lời giải

Ta có:

$$\begin{array}{l|l}
28x^5-2x^4-1013x^3 \qquad +14606x \quad -3447 & x^2-3x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{28x^5-84x^4+28x^3} & 28x^3+82x^2-1795x-5467 \\
\qquad 82x^4-2041x^3 & \\
\qquad \underline{82x^4-246x^3+82x^2} & \\
\qquad\quad -1795x^3-82x^2 \quad +14606x & \\
\qquad\quad \underline{-1795x^3+5385x^2-1795x} & \\
\qquad\qquad\quad -5467x^2+16401x-3347 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{-5467x^2+16401x-5467} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 2020 &
\end{array}$$

Từ đó ta có $P=(x^2-3x+1)(28x^3+82x^2-1795x-5467)+2020$ mà $x^2-3x+1=0 \Rightarrow P=2020$

C. Bài tập vận dụng

7.1. Xác định a, b sao cho $2x^3+ax-b$ chia cho $x+1$ thì dư -6, chia cho $x-2$ dư 21.

Hướng dẫn giải – đáp số

Theo định lý Bézout ta có: $f(-1)=-6; f(2)=21$

$\Rightarrow 2(-1)^3+a(-1)-b=-6 \Rightarrow a+b=4\ (1)$

$\Rightarrow 2.2^3+a.2-b=21 \Rightarrow 2a-b=5\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $3a=9 \Rightarrow a=3; b=1$

7.2. Tìm một đa thức bậc ba, biết P(x) chia cho $x,(x-1),(x-2),(x-3)$ được dư lần lượt là 10; 12; 4; 1.

Hướng dẫn giải – đáp số

Theo định lý Bézout ta có:

$P(0)=10; P(1)=12; P(2)=4; P(3)=1$

Dùng phương pháp nội suy Newton.

Ta đặt: $P(x)=d+cx+bx(x-1)+ax(x-1)(x-2)$

Cho $x=0$ ta được $P(0)=d$, suy ra $d=10$.

$P(x)=10+cx+bx(x-1)+ax(x-1)(x-2)$

Cho $x=1$ ta được $P(1)=10+c$, suy ra $c=2$.

$P(x)=10+2x+bx(x-1)+ax(x-1)(x-2)$

Cho $x=2$ ta được $P(2)=10+4+2b$, suy ra $b=-5$.

$P(x)=10+2x-5x(x-1)+ax(x-1)(x-2)$

Cho $x=3$ ta được $P(3)=10+6-30+6a$, suy ra $-14+6a=1 \Rightarrow a=\frac{5}{2}$.

Vậy $P(x)=10+2x-5x(x-1)+\frac{5}{2}x(x-1)(x-2)$

Rút gọn ta được: $P(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{25}{2}x^2+12x+10$

7.3. Đặt $x^2-z=a; y^2-zx=b, z^2-xy=c$.

Chứng minh rằng: $ax+by+cz \vdots a+b+c$

Hướng dẫn giải – đáp số

Xét $ax+by+cz=\left(x^2-yz\right)x+\left(y^2-zx\right)y+\left(z^2-xy\right)z$

$=x^3-xyz+y^3-xyz+z^3-xyz$

$=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3-3x^3y-3xy^3-3xyz$

$=(x+y)^3+z^3-3xy(x+y+z)$

$=(x+y+z)\left[(x+y)^2-(x+y)z+z^2\right]-3xyz$

$=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right)$

$=(x+y+z)(a+b+c)$

Suy ra $ax+by+cz$ chia hết cho $a+b+c$

7.4. Tìm số dư của phép chia biểu thức $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+2020$ cho đa thức $x^2+8x+12$

Hướng dẫn giải – đáp số

Cách 1. Ta có: $f(x)=(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+2020$

$=\left(x^2+8x+7\right)\left(x^2+8x+15\right)+2020$

Đặt $x^2+8x+12=y \Rightarrow f(y)=(y-5)(y+3)+2020$

$f(y)=y^2-2y+2005 \Rightarrow f(y):y$ dư 2005

$\Rightarrow f(x)$ chia cho $x^2+8x+12$ dư 2005

Cách 2. $g(x)=x^2+8x+12$

Ta có: $g(x) = x^2 + 8x + 12 = (x+2)(x+6)$

Gọi đa thức thương là $q(x)$ đa thức dư là $ax + b$, thì:

$f(x) = g(x).q(x) + ax + b$

Xét $x = x - 2$, ta có: $f(-2) = 0 - 2a + b \Rightarrow -2a + b = 2005$ (1)

Xét $x = -6$, ta có: $f(-6) = 0 - 6a + b \Rightarrow -6a + b = 2005$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} a = 0 \\ b = 2005 \end{cases}$

Vậy đa thức dư là 2005.

7.5. Cho x, y, z đôi một khác nhau. Chứng minh rằng:

$A = 3x^n(z-y) + 3y^n(x-z) + 3z^n(y-x)$ chia hết cho $B = (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$ với n là số nguyên lớn hơn 1.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $B = 3(x-y)(y-z)(z-x)$

Xét $x = y \Rightarrow A = 0 \Rightarrow A \vdots (x-y)$

Xét $y = z \Rightarrow A = 0 \Rightarrow A \vdots (y-z)$

Xét $x = z \Rightarrow A = 0 \Rightarrow A \vdots (z-x) \Rightarrow A \vdots (x-y)(y-z)(z-x)$ mà $A \vdots 3$

$\Rightarrow A \vdots 3(x-y)(y-z)(z-x)$ hay $A \vdots B$.

7.6. Tìm các số nguyên a và b để đa thức $A(x) = x^4 - 3x^3 + ax + b$ chia hết cho đa thức $B(x) = x^2 - 3x + 4$

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt phép chia, ta có:

$$\begin{array}{l|l}
x^4 - 3x^3 \qquad + ax \qquad + b & x^2 - 3x + 4 \\ \cline{2-2}
x^4 - 3x^3 + 4x^2 & x^2 - 4 \\ \cline{1-1}
\qquad -4x^2 + ax \qquad + b & \\
\qquad -4x^2 + 12x \qquad -16 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad (a-12)x + (b+16) &
\end{array}$$

Để $A(x) \vdots B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a - 12 = 0 \\ b + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = -16 \end{cases}$

7.7. Tìm a và b để $f(x) = x^4 - ax^2 + b$ chia hết cho $x^2 + 3x + 2$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$

Đặt thương là $q(x)$, ta có: $x^4-ax^2+b=(x+1)(x+2)q(x)$

- Chọn $x=-1$ ta có:

$(-1)^4-a(-1)^2+b=(-1+1)(-1+2)q(-1)\Rightarrow a+b=-1$ (1)

- Chọn $x=-2$ ta có:

$(-2)^4-a(-2)^2+b=(-2+1)(-2+2)q(-2)\Rightarrow b-4a=-16$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $3a=15\Rightarrow a=5\Rightarrow b=4$

7.8. Cho đa thức $P(x)=ax^2+bx+c$. Biết P(x) chia cho $x+1$ dư 3, P(x) chia cho x dư 1 và P(x) chia cho $x-1$ dư 5. Tìm các hệ số a, b, c.

(Tuyển sinh lớp 10, Trường THPT Chuyên, tỉnh Nam Định, năm học 2015 - 2016)

Hướng dẫn giải – đáp số

Cách 1. P(x) chia cho x thì dư $1\Rightarrow c=1\Rightarrow P(x)=ax^2+bx+1$

Theo định lý Bézout: $P(-1)=3;P(1)=5$

$\Rightarrow a(-1)^2+b(-1)+1=3\Rightarrow a-b=2$ (1)

$\Rightarrow a.1^2+b.1+1=5\Rightarrow a+b=4$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $a=3;b=1$

Kết luận vậy $a=3;b=1;c=1$

Cách 2. Viết đa thức P(x) dưới dạng: $P(x)=a(x+1)x+mx+n$

Chọn $x=0$, ta được $P(0)=n\Rightarrow n=1$

Do đó $P(x)=a(x+1)x+mx+1$

Chọn $x=-1$, ta được $P(-1)=-m+1\Rightarrow -m+1=3\Rightarrow m=-2$

Do đó $P(x)=a(x+1)x-2x+1$

Chọn $x=1$, ta được $P(1)=2a-1\Rightarrow 2a-1=5\Rightarrow a=3$

Kết luận vậy $a=3;b=1;c=1$

7.9. Cho $x^2-4x+1=0$.

Tính giá trị biểu thức $B=x^5-3x^4-3x^3+6x^2-20x+2025$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\begin{array}{l|l} x^5-3x^4-3x^3+6x^2-20x+2025 & x^2-4x+1 \\ \cline{2-2} x^5-4x^4+x^3 & x^3+x^2+5 \\ \hline \quad x^4-4x^3+6x^2 & \\ \quad x^4-4x^3+x^2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overline{} \\ x^2 - 20x + 2025 \\ x^2 - 20x + 5 \\ \hline 2020 \end{array}$$

Từ đó ta có $B = (x^2 - 4x + 1)(x^3 + x^2 + 5) + 2020$

Với giả thiết $x^2 - 4x + 1 = 0$ suy ra $B = 2020$

7.10. Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Tìm a, b, c biết rằng $P(0) = 26; P(1) = 3; P(2) = 2020$

Hướng dẫn giải – đáp số

Với $P(0) = 26 \Rightarrow c = 26$ suy ra $P = ax^2 + bx + 26$

Ta có: $P(1) = 3 \Rightarrow a + b + 26 = 3 \Rightarrow a + b = -23$ (1)

Ta có: $P(2) = 2020 \Rightarrow 4a + 2b + 26 = 2020 \Rightarrow 4a + 2b = 1994$

$\Rightarrow 2a + b = 997$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $a = 1020; b = -1043$

Vậy $a = 1020; b = -1043; c = 26$.

7.11. Tìm phần dư trong phép chia sau:

a) $f(x) = x^{100} + x^{99} + x^{98} + ... + x + 1$ chia cho $g(x) = x - 1$;

b) $f(x) = x^{100} + x^{99} + x^{98} + ... + x + 1$ chia cho $g(x) = x^2 - 1$;

c) $f(x) = 100x^{100} - 99x^{99} + 98x^{98} + ... + 2x^2 - x + 1$ chia cho $g(x) = x + 1$;

d) $f(x) = x^2 + x^9 + x^{1945} - 3$ chia cho $x^2 + x + 1$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Theo định lý Bézout, $f(x) : g(x)$ có phần dư là $f(1)$

$\Rightarrow r = f(1) = 1^{100} + 1^{99} + 1^{98} + ... + 1 + 1 = 101$

b) Đặt $f(x)$ chia cho $g(x)$ được thương là $q(x)$ và phần dư là $ax + b$. Ta có:

$f(x) = g(x).q(x) + ax + b = (x-1)(x+1)q(x) + ax + b$

Chọn $x = 1$ ta được $f(1) = (1-1)(1+1)q(1) + a.1 + b \Rightarrow 101 = a + b$ (1)

Chọn $x = -1$ ta được $f(-1) = (-1-1)(-1+1)q(-1) + a.(-1) + b \Rightarrow 1 = -a + b$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $b = 51$ và $a = 50$

Vậy phần dư khi chia $f(x)$ chia cho $g(x)$ là $50x + 51$

c) Theo định lý Bézout $f\left(x\right)$ chia cho $g\left(x\right)$ có phần dư là $f\left(-1\right)$ suy ra:

$r=f\left(-1\right)=100\left(-1\right)^{100}-99\left(-1\right)1^{99}+98\left(-1\right)^{98}+...+2\left(-1\right)^{2}-\left(-1\right)+1$

$=100+99+98+...+2+1+1=5051$

d) ta có $f\left(x\right)=x^2+x+1+x^9-1+x^{1945}-x-3$

mà x^2+x+1 chia hết cho x^2+x+1.

x^9-1 chia hết cho x^3-1 và x^3-1 chia hết cho x^2+x+1.

$\Rightarrow x^9-1$ chia hết cho x^2+x+1.

$x^{1945}-x=x\left(x^{1944}-1\right)=x\left[\left(x^3\right)^{648}-1\right]\vdots x^3-1\Rightarrow x^{1945}-x\vdots x^2+x+1$

Do đó $f\left(x\right)$ chia cho x^2+x+1 có phần dư là -3.

7.12.

a) Xác định hệ số a, b để $f\left(x\right)=x^3+2x^2+ax+b$ chia hết cho $g\left(x\right)=x^2+x+1$.

b) Tìm đa thức dư trong phép chia $P\left(x\right)=x^{161}+x^{37}+x^{13}+x^5+x+2020$ cho đa thức $Q\left(x\right)=x^2+1$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Thực hiện phép chia ta có:

$$\begin{array}{l|l}
x^3+2x^2\quad +ax\quad +b & x^2+x+1 \\ \cline{2-2}
x^3+x^2\quad +x & x+1 \\ \hline
\quad x^2\quad +\left(a-1\right)x\quad +b & \\
\quad x^2\quad +x\quad +1 & \\ \cline{1-1}
\qquad \left(a-2\right)x+\left(b-1\right) &
\end{array}$$

Để f(x) chia hết cho g(x) thì $\begin{cases} a-2=0 \\ b-1=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

b) Ta có $P\left(x\right)=x^{161}-x+x^{37}-x+x^{13}-x+x^5-x+5x+2020$

Ta có $x^{161}-x=x\left(x^{160}-1\right)\vdots x^4-1$ mà $x^4-1\vdots x^2+1$ nên $x^{161}-1\vdots x^2+1$

$x^{37}-x=x\left(x^{36}-1\right)\vdots x^4-1$ mà $x^4-1\vdots x^2+1$ nên $x^{37}-1\vdots x^2+1$

$x^5-x=x\left(x^4-1\right)\vdots x^4-1$ mà $x^4-1\vdots x^2+1$ nên $x^5-1\vdots x^2+1$

Suy ra $x^{161}-x+x^{37}-x+x^{13}-x+x^5-x\vdots x^2+1$

Suy ra $P\left(x\right)$ chia cho x^2+1 dư $5x+2020$.

7.13. Tìm phần dư của đa thức $f(x)$ chia cho đa thức $g(x)=x^2-2x-3$ biết rằng $f(x)$ chia cho $(x+1)$ và $(x-3)$ có số dư lần lượt là -45 và -165.

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt đa thức thương là $q(x)$ và phần dư là $ax+b$. Suy ra

$f(x)=g(x).q(x)+ax+b \Rightarrow f(x)=(x-1)(x-3)q(x)+ax+b$

Theo định lý Bézout ta có: $f(-1)=45; f(3)=-165$

Ta có: $f(-1)=(-1-1)(-1-3)q(-1)+a(-1)+b=-a+b \Rightarrow -a+b=-45$ (1)

Ta có: $f(3)=(3+1)(3-3)q(3)+a.3+b=3a+b \Rightarrow 3a+b=-165$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $4a=-120 \Rightarrow a=-30$

Thay vào (2) ta có: $3(30)+b=-165 \Rightarrow b=-75$

Vậy phần dư $f(x):g(x)$ là $-30x-75$.

7.14. Tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của đa thức $C=x^3-3x^2-3x-1$ chia hết cho giá trị của đa thức $D=x^2+x+1$

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt phép chia ta có:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3-3x^2-3x\ -1 & x^2+x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3\ +x^2+x} & x-4 \\
\quad -4x^2-4x-1 & \\
\quad \underline{-4x^2-4x-4} & \\
\qquad\qquad\quad 3 &
\end{array}
$$

Muốn cho giá trị của C chia hết cho giá trị của D thì ta phải có $x^2+x+1 \in Ư(3)=\{\pm1;\pm3\}$

x^2+x+1	1	-1	3	-3
x	$0;-1$	$\varnothing$	$1;-2$	$\varnothing$

Vậy với $x\in\{0;-1;1;-2\}$ thì giá trị của biểu thức C chia hết cho giá trị biểu thức D.

7.15. Xác định a, b sao cho $f(x)=6x^4-7x^3+ax^2+3x+2$ chia hết cho $g(x)=x^2-x+b$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt phép chia ta có:

$$
\begin{array}{l|l}
6x^4\quad -7x^3\qquad +ax^2\qquad +3x\qquad\qquad +2 & x^2-x+b \\ \cline{2-2}
\underline{6x^4\quad -6x^3\qquad +6bx^2\qquad\qquad\qquad\qquad\quad} & x^2-x+(a-6b-1)
\end{array}
$$

$$\begin{array}{lllll}
-x^3 & +(a-6b)x^2 & +3x & & +2 \\
-x^3 & +x^2 & -bx & & \\
\hline
 & (a-6b-1)x^2 & +(3+b)x & +2 & \\
 & \multicolumn{3}{l}{(a-6b-1)x^2-(a-6b-1)x+b(a-6b-1)} & \\
\hline
 & & \multicolumn{3}{l}{(a-5b+2)x+\left(2-ab+6b^2+b\right)}
\end{array}$$

Để $f(x)$ chia hết cho $g(x)$ thì

$$\begin{cases} a-5b+2=0 \\ 2-ab+6b^2+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5b-2\ (1) \\ 2-(5b-2)b+6b^2+b=0\ (2) \end{cases}$$

Giải (2) ta có: $2-(5b-2)b+6b^2+b=0$

$\Leftrightarrow b^2+3b+2=0 \Leftrightarrow b^2+b+2b+2=0 \Leftrightarrow (b+1)(b+2)=0$

- *Trường hợp 1.* Với $b+1=0 \Rightarrow b=-1 \Rightarrow a=5(-1)-2=-7$

- *Trường hợp 2.* Với $b+2=0 \Rightarrow b=-2 \Rightarrow a=5(-2)-2=-12$

Vậy với $(a;b)\in\{(-7;-1),(-12;-2)\}$ thì $f(x)$ chia hết cho $g(x)$

7.16. Cho đa thức $f(x)=2x^4-x^3-x^2-x+2$ và đa thức $g(x)=x^2+1$. Tìm $x\in\mathbb{Z}$ để $f(x)$ chia hết cho $g(x)$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có:

$f(x)=2x^4-x^3-x^2-x+2=2x^4+2x^2-x^3-x-2x^2+2$

$=2x^2\left(x^2+1\right)-x\left(x^2+1\right)-3\left(x^2+1\right)+5=\left(x^2+1\right)\left(2x^2-x-3\right)+5$

$f(x)\,\vdots\, g(x) \Leftrightarrow 5\,\vdots\, x^2+1 \Leftrightarrow x^2+1\in\{\pm1;\pm5\} \Leftrightarrow x^2\in\{0;4\} \Leftrightarrow x\in\{0;-2;2\}$

7.17. Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng $f(x)$ chia cho $x-2$ thì dư 2, $f(x)$ chia cho $x-3$ thì dư 7 và $f(x)$ chia cho x^2-5x-6 thì được thương là $1-x^2$ và còn dư.

Hướng dẫn giải – đáp số

$f(x)$ chia cho x^2-5x-6 được thương là $1-x^2$ và còn dư $\Rightarrow f(x)$ có bậc 4.

Đặt $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

Theo định lý Bézout: $f(x)$ chia cho $x-2$ thì dư $2 \Rightarrow f(2)=2$

$\Rightarrow 16a+8b+4c+2d+e=2$

$f(x)$ chia cho $x-3$ thì dư $7 \Rightarrow f(3)=7 \Rightarrow 81a+27b+9c+3d+e=7$

Giả sử $f(x)$ chia cho x^2-5x-6 được thương là $1-x^2$ và còn dư $q(x)$

$\Rightarrow q(x)=mx+n \Rightarrow f(x)=(1-x^2)(x^2-5x+6)+q(x)$

$$f(x)=-x^4+5x^3-5x^2+6+q(x) \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=5 \\ c=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2d+e=-2 \\ 3d+e=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=0 \\ e=-2 \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x)=-x^4+5x^3-5x^2-2$

Ngoài ra chúng ta có thể giải bằng phương pháp nội suy Newton.

7.18. Cho đa thức $f(x)=x^3+ax^2+bx-a-1$. Xác định a, b để $f(x) \vdots x-2$ và $f(x) \vdots x-1$

Hướng dẫn giải – đáp số

Theo định lý Bézout: $f(x) \vdots x-2 \Rightarrow f(2)=0, f(2) \vdots x-1 \Rightarrow f(1)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8+4a+2b-a-1=0 \\ 1+a+b-a-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{-7}{3} \\ b=0 \end{cases}$$

7.19. Tìm thương và dư của phép chia $f(x)=2x^4-3x^2+4x-5$ cho $x+2$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có sơ đồ Horner

f	2	0	-3	4	-5
$\alpha=-2$	2	-4	5	-6	7

Vậy thương là $g(x)=2x^3-4x^2+5x-6$ và số dư là 7.

Nhận xét. Ngoài ra chúng ta còn có thể giải bằng cách chia thông thường (đặt phép chia).

7.20. Tìm các số a, b, c biết rằng đa thức $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$ chia hết cho $(x-1)^3$

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt phép chia, ta có:

$$\begin{array}{l|l} x^4 \quad +ax^3 \quad +bx^2 \quad +cx \quad +1 & x^3-3x^2+3x-1 \\ \cline{2-2} x^4 \quad -3x^3 \quad +3x^2 \quad -x & x+(a+3) \\ \hline \quad (a+3)x^3+(b-3)x^2 \quad +(c+1)x \quad +1 & \\ \quad (a+3)x^3-3(a+3)x^2 \quad +3(a+3)x \quad -(a+3) & \\ \cline{1-1} \qquad (b+3a+6)x^2+(c-3a-8)x+(a+4) & \end{array}$$

Để phép chia hết thì: $\begin{cases} b+3a+6=0 \\ c-3a-8=0 \\ a+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=6 \\ c=-4 \end{cases}$

Nhận xét. Ngoài ra, quan sát hệ số cao nhất và hệ số tự do của đa thức bị chia và đa thức chia. Để phép chia hết thì đa thức thương phải là $x-1$. Do vậy ta có:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+1=\left(x^3-3x^2+3x-1\right)\left(x-1\right)$$

$$=x^4-4x^3+6x^2-4x+1$$

Đồng nhất thức hai vế ta được: $a=-4; b=6; c=-4$.

7.21. Xác định các hệ số a và b để đa thức $A=x^4-2x^3+3x^2+ax+b$ là bình phương của một đa thức.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có A là bình phương của một đa thức thì:

$$A=\left(x^2+cx+d\right)^2=x^4+2cx^3+\left(c^2+2d\right)x^2+2cdx+d^2$$

Mà $A=x^4-2x^3+3x^2+ax+b$

Suy ra $\begin{cases}2c=-2\\ c^2+2d=3\\ 2cd=a\\ d^2=b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-2\\ b=1\\ c=-1\\ d=1\end{cases} \Rightarrow a=-2; b=1$

Vậy $A=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$.

Chuyên đề 8. PHÉP CHIA HẾT TRÊN TẬP HỢP SỐ NGUYÊN

A. Kiến thức cần nhớ

1. Khái niệm: Cho a, b là hai số nguyên và b khác 0. Ta nói a chia hết cho b nếu tồn tại số nguyên q sao cho $a = bq$.

Khi a chia hết cho b thì ta nói b là ước của a hay b chia hết a; a là bội của b.

Lưu ý: Khi a chia hết cho b thì a cũng chia hết cho $-b$.

2. Một số tính chất thường dùng

a) Nếu a chia hết cho b, b chia hết cho c thì a chia hết cho c.

b) Nếu a, b chia hết cho m thì $ax + by$ cũng chia hết cho m (x, y là số nguyên)

c) Nếu a chia hết cho tích m.n thì a chia hết cho m, a chia hết cho n. (điều ngược lại không đúng)

d) Nếu a chia hết cho m, n với $(m,n) = 1$ thì a chia hết cho tích mn.

e) Nếu tích a.b chia hết cho m mà $(\mathrm{b},\mathrm{m}) = 1$ thì a chia hết cho m.

f) Cho p là số nguyên tố. Khi đó, nếu tích ab chia hết cho p thì a chia hết cho p hoặc b chia hết cho p.

g) Khi chia n + 1 số nguyên dương liên tiếp cho n ($n > 0$) luôn nhận được hai số dư bằng nhau.

h) Tích của n số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho n ($n > 0$).

i) Trong n số nguyên liên tiếp (n > 0) luôn có duy nhất một số chia hết cho n.

4. Cho a,b là hai số nguyên và b khác 0. Khi đó, tồn tại duy nhất cặp số nguyên (q,r) sao cho $a = bq + r$ và $0 \le r \le |b| - 1$.

Cho $b > 0$ và a tuỳ ý.

Khi đó, nếu chia a cho b thì số dư chỉ có thể là 0, 1, 2,..., b - 1.

B. Một số ví dụ

I. PHƯƠNG PHÁP XÉT SỐ DƯ

Ví dụ 1: Chứng minh rằng:

a) $ab(a+b)$ chia hết cho 2 với $a,b \in \mathbb{Z}$

b) $A = n(n^2+1)(n^2+4)$ chia hết cho 5 với $n \in \mathbb{Z}$

Giải

Tìm cách giải. Để chứng minh A(n) chia hết cho k, ta có thể xét mọi trường hợp về số dư khi chia n cho k. Chẳng hạn:

Câu a. Chúng ta xét các trường hợp số dư khi chia a; b cho 2.

Câu b. Chúng ta xét các trường hợp số dư khi chia n cho 5.

Trình bày lời giải

a) Xét các trường hợp về số dư khi chia cho 2, ta có:

Nếu ít nhất a hoặc b chia hết cho 2 thì ab chia hết cho 2.

Nếu a và b cùng không chia hết cho 2 thì chúng cùng lẻ suy ra $a+b$ chẵn do đó $a+b$ chia hết cho 2.

Vậy $ab(a+b)$ chia hết cho 2 với $a^*, b \in \mathbb{Z}$.

b) Xét các trường hợp về số dư khi chia cho 5, ta có:

Nếu $n = 5k \quad (k \in \mathbb{Z})$ thì A chia hết cho 5.

Nếu $n = 5k \pm 1$ thì $n^2 = 5m + 1 \quad (m \in \mathbb{Z})$ nên $n^2 + 4 = 5m + 5$ chia hết cho 5 suy ra A chia hết cho 5.

Nếu $n = 5k \pm 2$ thì $n^2 = 5m + 4 \quad (m \in \mathbb{Z})$ nên $n^2 + 1 = 5m + 5$ chia hết cho 5 suy ra A chia hết cho 5.

Vậy $A = n(n^2+1)(n^2+4)$ chia hết cho 5 với $n \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 2: Cho x, y, z là các số nguyên sao cho $(x-y)(y-z)(z-x) = x+y+z$

Chứng minh rằng $x+y+z$ chia hết cho 27.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Thành phố Hồ Chí Minh, vòng 2 - năm học 1995- 1996)

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy $x+y+z$ chia hết cho 27 tức là $(x-y)(y-z)(z-x)$ chia hết cho 27. Vì vậy chúng ta cần xét số dư khi chia x, y, z cho 3. Tuy nhiên nếu xét riêng thì nhiều trường hợp quá, do tính hoán vị chúng ta có thể xét các trường hợp cùng số dư, khác số dư.

Trình bày lời giải

Xét các trường hợp về số dư khi chia cho 3, ta có:

Nếu x, y, z chia cho 3 có các số dư khác nhau thì: $x-y, y-z, z-x$ cùng không chia hết cho 3, còn $x+y+z$ chia hết cho 3 do đó (x - y)(y - z)(z -x) = x + y + z không xảy ra.

Nếu x, y, z chỉ có hai số chia cho 3 có cùng số dư thì $x-y, y-z, z-x$ chỉ có một hiệu chia hết cho 3 còn $x+y+z$ không chia hết cho 3 do đó $(x-y)(y-z)(z-x) = x+y+z$ không xảy ra.

Do đó x, y, z chia cho 3 có cùng số dư suy ra $x-y, y-z, z-x$ chia hết cho 3. Vậy $x+y+z = (x-y)(y-z)(z-x)$ chia hết cho 27.

II. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH TÍCH

Ví dụ 3: Chứng minh rằng $P = a^5b - ab^5$ chia hết cho 30 với a, b là hai số nguyên bất kỳ.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Toàn quốc, năm học 1985 - 1986)

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy rằng nếu dùng phương pháp xét số dư cho 30 thì nhiều trường hợp quá nên không khả thi. Ta sử dụng phương pháp phân tích thành tích: để chứng minh A(n) chia hết cho k, ta phân tích k ra thừa số $k = p.q$, nếu $(p,q) = 1$, ta chứng minh A(n) chia hết cho p và A(n) chia hết cho q.

Mặt khác $30 = 2.3.5$ mà $(2;3) = (3;5) = (5;2) = 1$ nên ta chỉ cần chứng minh P chia hết cho 2; 3; 5. Mỗi trường hợp chúng ta dùng kỹ thuật xét số dư.

Trình bày lời giải

Ta có: $P = ab\left(a^2+b^2\right)\left(a^2-b^2\right)$

Vì $30 = 2.3.5$ mà $\left(2;3\right) = \left(3;5\right) = \left(5;2\right) = 1$ nên ta chứng minh P chia hết cho 2; 3; 5

Chứng minh P chia hết cho 2.

Nếu ít nhất a hoặc b chẵn thì ab chia hết cho 2.

Nếu a và b cùng lẻ thì $a-b$ chia hết cho 2.

Chứng minh P chia hết cho 3.

- Nếu ít nhất a hoặc b chia hết cho 3 thì ab chia hết cho 3.

- Nếu a, b cùng không chia hết cho 3 thì chúng có dạng $3k\pm1$ suy ra a^2, b^2 có dạng $3m+1$ nên a^2-b^2 chia hết cho 3.

Chứng minh P chia hết cho 5.

- Nếu ít nhất a hoặc b chia hết cho 5 thì ab chia hết cho 5.

- Nếu a, b cùng không chia hết cho 5.

Nếu a, b có một trong các dạng $5k\pm1$ hoặc $5k\pm2$ thì a^2, b^2 có cùng dạng $5m+1$ hoặc $5m+4$ nên a^2-b^2 chia hết cho 5.

Nếu a, b có một số có dạng $5k\pm1$ còn một số có dạng $5k\pm2$ thì a^2 và b^2 có một số có dạng $5m+1$ còn một số có dạng $5m+4$ nên a^2+b^2 chia hết cho 5.

Vậy P chia hết cho 30.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng một số có dạng: $P = n^4-4n^3-4n^2+16n$ (với n là số chẵn lớn hơn 4) thì chia hết cho 384.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Toàn quốc, năm học 1970 - 1971)

Giải

Tìm cách giải. Ta nhận thấy biểu thức có thể phân tích thành nhân tử được:

$n^4-4n^3-4n^2+16n = n\left(n-4\right)\left(n-2\right)\left(n+2\right)$. Vì n chẵn lớn hơn 4 nên $n = 2k+2$ $\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$. thay vào biểu thức P ta được: $P = \left(2k+2\right)\left(2k+2-4\right)\left(2k+2-2\right)\left(2k+2+2\right) = 16k\left(k-1\right)\left(k+1\right)\left(k+2\right)$. Mặt khác ta có $384 = 16.24$ do vậy chúng ta chỉ cần chứng minh $k\left(k-1\right)\left(k+1\right)\left(k+2\right)$ chia hết cho 24.

Trình bày lời giải

Ta có $n^4-4n^3-4n^2+16n = n\left(n-4\right)\left(n-2\right)\left(n+2\right)$

Vì n chẵn lớn hơn 4 nên $n = 2k+2$ $\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$ thay vào biểu thức P ta được:

$\left(2k+2\right)\left(2k+2-4\right)\left(2k+2-2\right)\left(2k+2+2\right) = 16k\left(k-1\right)\left(k+1\right)\left(k+2\right)$.

$k, k+1, k+2$ có một số chia hết cho 3.

$k-1,k,k+1,k+2$ có hai số chẵn liên tiếp, nên một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 4 suy ra $k(k-1)(k+1)(k+2)$ chia hết cho 8.

Do đó $k(k-1)(k+1)(k+2)$ chia hết cho 24 vì $(3;8)=1$ hay $16k(k-1)(k+1)(k+2)$ chia hết cho 16.24 tức là $n^4-4n^3-4n^2+16n$ chia hết cho 384.

III. PHƯƠNG PHÁP TÁCH TỔNG

Ví dụ 5: Chứng minh rằng với mọi số nguyên a ta đều có (a^3+5a) là số nguyên chia hết cho 6.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Thành phố Hà Nội, năm học 2008 - 2009)

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy ví dụ này có thể giải được bằng kỹ thuật xét số dư. Song chúng ta có thể giải bằng phương pháp tách tổng: Để chứng minh A(n) chia hết cho k, ta có thể biến đổi A(n) thành tổng của nhiều hạng tử và chứng minh mỗi hạng tử chia hết cho k. Do đó ta chỉ cần tách $a^3+5a=a^3-a+6a$, sau đó chứng tỏ a^3-a và 6a cùng chia hết cho 6.

Trình bày lời giải

Ta có $a^3+5a=a^3-a+6a$.

Mà $a^3-a=(a-1)a(a+1)$ chia hết cho 6 vì là tích của ba số nguyên liên tiếp và 6a chia hết cho 6 với mọi số nguyên a.

Vậy (a^3+5a) là số nguyên chia hết cho 6.

IV. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG HẰNG ĐẲNG THỨC

Ví dụ 6: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, số $A(n)=5^n(5^n+1)-6^n(3^n+2^n)$ chia hết cho 91.

(Tuyển sinh lớp 10, Trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, Vòng 1 - năm học 1997 - 1998)

Giải

Tìm cách giải. Những bài toán chứng minh chia hết mà biểu thức có số mũ n hoặc quá lớn chúng ta có thể sử dụng kết quả của các hằng đẳng thức mở rộng:

a^n-b^n chia hết cho $a-b$ $(a\neq b)$ với n bất kỳ.

a^n-b^n chia hết cho $a+b$ $(a\neq -b)$ với n chẵn.

a^n+b^n chia hết cho $a+b$ $(a\neq -b)$ với n lẻ.

Trong ví dụ này, ta có $91=7.13$ và $(7;13)=1$. Để chứng minh A(n) chia hết cho 91, ta chứng minh A(n) chia hết cho 7 và 13. Vậy chúng ta chỉ cần nhóm các hạng tử một cách thích hợp.

Trình bày lời giải

Ta có: $91=7.13$ và $(7;13)=1$. Để chứng minh A(n) chia hết cho 91, ta chứng minh A(n) chia hết cho 7 và 13. Ta có $A(n)=25^n+5^n-18^n-12^n$.

Áp dụng tính chất $\left(a^n - b^n\right) \vdots (a-b)$ với mọi a, b, n là số nguyên dương và $a \neq b$, $25^n - 18^n$ chia hết cho $25-18$ tức là $25^n - 18^n$ chia hết cho 7.

$12^n - 5^n$ chia hết cho $12-5$ tức là $12^n - 5^n$ chia hết cho 7.

Vậy $A(n) = 25^n - 18^n - \left(12^n - 5^n\right)$ chia hết cho 7.

$25^n - 12^n$ chia hết cho $25-12$ tức là $25^n - 12^n$ chia hết cho 13.

$18^n - 5^n$ chia hết cho $18-5$ tức là $18^n - 5^n$ chia hết cho 13.

Vậy $A(n) = 25^n - 12^n - \left(18^n - 5^n\right)$ chia hết cho 13.

Suy ra số $A(n) = 5^n\left(5^n + 1\right) - 6^n\left(3^n + 2^n\right)$ chia hết cho 91.

Ví dụ 7: Chứng minh rằng nếu n là số nguyên dương thì $25^n + 7^n - 4^n\left(3^n + 5^n\right)$ chia hết cho 65

(Tuyển sinh lớp 10, Trường THPT chuyên Hà Nội, năm học 2014 - 2015)

Giải

Ta có: $65 = 13.5$ và (5; 13) = 1. Để chứng minh biểu thức chia hết cho 65, ta chứng minh biểu thức chia hết cho 13 và 5.

Ta co: $25^n + 7^n - 4^n\left(3^n + 5^n\right) = 25^n + 7^n - 12^n - 20^n$

Áp dụng tính chất $\left(a^n - b^n\right) \vdots (a-b)$ với mọi a, b, n là số nguyên dương và $a \neq b$

$25^n - 12^n$ chia hết cho $25-12$ tức là $25^n - 12^n$ chia hết cho 13.

$20^n - 7^n$ chia hết cho $20-7$ tức là $20^n - 7^n$ chia hết cho 13.

$25^n + 7^n - 4^n\left(3^n + 5^n\right)$ chia hết cho 13

$25^n - 20^n$ chia hết cho $25-20$ tức là $25^n - 20^n$ chia hết cho 5.

$12^n - 7^n$ chia hết cho $12-7$ tức là $12^n - 7^n$ chia hết cho 5.

$25^n + 7^n - 4^n\left(3^n + 5^n\right)$ chia hết cho 5

$A = \left(25^n - 20^n\right) - \left(12^n - 7^n\right) \vdots 5$ mà ƯCLN $(5;13) = 1$ nên $A \vdots 65$.

V. PHƯƠNG PHÁP DÙNG NGUYÊN LÝ ĐIRICHLET

Phương pháp giải

Nếu nhốt $n+1$ thỏ vào n cái lồng thì chắc chắn có một lồng chứa ít nhất hai thỏ.

- Trong n số nguyên liên tiếp thì có một số chia hết cho n ($n \geq 1$)
- Trong $n+1$ số ngùyên bất kỳ thì có ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho n ($n \geq 1$).

Ví dụ 8: Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên n khác 0 thoả mãn $\left(13579^n - 1\right)$ chia hết cho 3^{13579}

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Thành phố Hà Nội, năm học 2005 - 2006)

Giải

Xét 3^{13579} số sau: 13579; 13579^2; 13579^3;…..; 13579^{13579} đem chia cho 3^{13579} ta nhận được 3^{13579} số dư.
Mà 13579 không chia hết cho 3 nên trong các số trên không có số nào chia hết cho 3 do đó chúng nhận các số dư trong các số: 1; 2; 3;...; $3^{13579}-1$ nên tồn tại hai số có cùng số dư.
Giả sử đó là hai số $13579^i;13579^j$ $(i>j)\Rightarrow 13579^i-13579^j$ chia hết cho $3^{13579}\Rightarrow 13579^i\left(13579^{i-j}-1\right)$ chia hết cho 3^{13579} mà $(13579;3)=1$ nên $\left(13579^{i-j}-1\right)$ chia hết cho 3^{13579} với $n=i-j$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét. Chúng ta có thể giải được bài toán tổng quát sau: Với a và p là hai số nguyên tố cùng nhau. Với số tự nhiên k chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên n khác 0 thoả mãn $\left(a^n-1\right)$ chia hết cho p^k.

Ví dụ 9: Chứng minh rằng trong 5 số nguyên bất kỳ bao giờ cũng tìm được 3 số có tổng chia hết cho 3.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Thành phố Hà Nội, năm học 2000 – 2001)

Giải

Đặt 5 số đó là a, b, c, d, e.
Đem 5 số chia cho 3 chúng chỉ nhận các số dư là 0; 1 ; 2.
Nếu tồn tại 3 số có cùng số dư thì tổng ba số đó chia hết cho 3.
Nếu không tồn tại 3 số có cùng số dư thì nhiều nhất chỉ có 2 số có cùng số dư khi chia cho 3, suy ra phải có 3 số có số dư khác nhau khi chia cho 3. Tổng 3 số này chia hết cho 3.

VI. PHƯƠNG PHÁP DÙNG QUY NẠP TOÁN HỌC

Phương pháp giải

Trong toán học, khi dùng quy nạp để chứng minh A(n) chia hết cho k với $n\ge n_0$ ta thực hiện:

Bước 1. Chứng minh A(n) chia hết cho k với $n=n_0$.

Bước 2. Chứng minh với mọi $m\ge n_0$ giả sử nếu A(m) chia hết cho k đúng, ta phải chứng minh $A(m+1)$ chia hết cho k.

Bước 3. Kết luận.

Ví dụ 10: Với mọi n nguyên dương, chứng minh rằng: $A(n)=7^n+3n-1$ chia hết cho 9.

Giải

Với $n=1$ thì $A(1)=7+3-1=9$ chia hết cho 9.

Giả sử bài toán đúng với $n=k\,(k\ge 1)$, tức là $A(k)=7^k+3k-1$ chia hết cho 9. Ta cần chứng minh mệnh đề đúng với $n=k+1$. Thật vậy:

Ta có: $A(k+1)=7^{k+1}+3(k+1)-1=7.7^k+3k+2$

$\Rightarrow A(k+1)=7.\left(7^k+3k-1\right)-18k+9$. Vì 7^k+3k-1 chia hết cho 9 và 18k; 9 chia hết cho 9 $\Rightarrow A(k+1)$ chia hết cho 9. Như vậy bài toán đúng với $n=k+1$. Do đó bài toán đúng với mọi n là số nguyên dương.

Ví dụ 11: Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n thì $12^{2n+1}+11^{n+2}$ chia hết cho 133.

Giải

Với $n=1$, tổng $12^3+11^3=2926=22.133$ chia hết cho 133.

Giả sử mệnh đề đúng với $n=k\left(k\ge 1\right)$, tức là $12^{2k+1}+11^{k+2}$ chia hết cho 133. Ta cần chứng minh đúng với $n=k+1$.

Tacó: $12^{2k+3}+11^{k+3}=144.12^{2k+1}+11.11^{k+2}=133.12^{2k+1}+11.\left(12^{2k+1}+11^{k+2}\right)$. Mỗi số hạng của tổng chia hết cho 133 nên $12^{2k+3}+11^{k+3}$ chia hết cho 133.

Như vậy bài toán đúng với $n=k+1$

Do đó bài toán đúng với mọi n là số nguyên dương.

VII. PHƯƠNG PHÁP DÙNG ĐỒNG DƯ THỨC

Phương pháp giải

Hai số nguyên a và b chia cho số nguyên m ($m\ne 0$) có cùng số dư ta nói a đồng dư với b theo modun m, kí hiệu $a\equiv b\left(\bmod m\right)$.

Với $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ và $m\in\mathbb{N}^*$ ta có:

$a\equiv b\left(\bmod m\right);b\equiv c\left(\bmod m\right)\Rightarrow a\equiv c\left(\bmod m\right)$

$a\equiv b\left(\bmod m\right);\mathrm{c}\equiv d\left(\bmod m\right)\Rightarrow a+c\equiv b+d\left(\bmod m\right)$

$a-c\equiv b-d\left(\bmod m\right);a.c\equiv b.d\left(\bmod m\right)$

$a\equiv b\left(\bmod m\right)\Rightarrow a^n\equiv b^n\left(\bmod m\right)$ với $n\in\mathbb{N}^*$

$a\equiv b\left(\bmod m\right);\mathrm{c}\in\mathbb{N}^*\Rightarrow ac\equiv bc\left(\bmod m\right)$ với $c\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 12: Cho $A=27309^{10}+27309^{10^3}+27309^{10^3}+...+27309^{10^{10}}$. Tìm số dư trong phép chia A cho 7.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Thành phố Hà Nội, năm học 2008 - 2009)

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy $27309\equiv 2\left(\bmod 7\right)$, mặt khác $2^3=8\equiv 1\left(\bmod 7\right)\Rightarrow 2^{3k}\equiv 1\left(\bmod 7\right)$ nên ta cần tìm đồng dư của số mũ với 3.

Trình bày lời giải

Ta có $10^n\equiv 1\left(\bmod 7\right)$ với $n\in\mathbb{N}\Rightarrow 10^n=3k+1$ (với $k\in\mathbb{N}$) (1)

Ta có $27309\equiv 2\left(\bmod 7\right)\Rightarrow 27309^{3k+1}\equiv 2^{3k+1}\equiv 2.8^k\equiv 2\left(\bmod 7\right)$ (2)

Từ (1), (2) ta có $A\equiv 2+2+...+2\left(\bmod 7\right)$

$A\equiv 20\equiv 6\left(\bmod 7\right)$

Vậy số dư trong phép chia A cho 7 là 6.

Ví dụ 13: Với mỗi số tự nhiên n, đặt $a_n = 3n^2 + 6n + 13$. Chứng minh rằng nếu hai số a_i, a_j không chia hết cho 5 và có số dư khác nhau khi chia cho 5 thì $a_i + a_j$ chia hết cho 5.

Giải

Ta có $a_n = 3(n+1)^2 + 10$.

Ta thấy nếu a_n không chia hết cho 5 thì $n+1$ không chia hết cho 5 suy ra:

$(n+1)^2 \equiv 1$ hoặc $4 \pmod 5 \Rightarrow a_n \equiv 3$ hoặc $2 \pmod 5$. Do đó, nếu a_i, a_j đều không chia hết cho 5 và có số dư khác nhau thì $a_i + a_j \equiv 3 + 2 \equiv 0 \pmod 5$ nên $a_i + a_j$ chia hết cho 5.

VIII. PHƯƠNG PHÁP ÁP DỤNG TÍNH CHẴN LẺ

Phương pháp giải

Một số bài toán chia hết ta có thể giải nhanh bằng nhận xét sau:

Trong hai số nguyên liên tiếp thì có một số chẵn và một số lẻ.

Tổng hoặc hiệu của một số chẵn và một số lẻ là một số lẻ.

Tổng hoặc hiệu của hai số chẵn là một số chẵn.

Tích của các số lẻ là số lẻ.

Trong tích chứa ít nhất một số chẵn thì kết quả là số chẵn.

Ví dụ 14: Cho $a_1; a_2; a_3; ....., a_7$ là các số nguyên và $b_1; b_2; b_3; .....,b_7$ cũng là số nguyên đó, nhưng lấy theo thứ tự khác. Chứng minh rằng $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)...(a_7 - b_7)$ là số chẵn.

(Thi Học sinh giỏi Anh, năm 1968)

Giải

Tìm cách giải. Phân tích từ kết luận, chúng ta chứng tỏ phải có một nhân tử là số chẵn. Mỗi nhân tử là một hiệu, tổng 7 hiệu này bằng 0 (số chẵn), nên các hiệu này không thể toàn là số lẻ được, mà phải có ít nhất một số chẵn. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Trình bày lời giải

Đặt $c_i = a_i - b_i$ với I = 1,2, 3,..., 7. Ta có:

$c_1 + c_2 + ... + c_7 == (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + ... + (a_7 - b_7)$

$= (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_7) - (b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_7) = 0$

Vì có số lẻ c_i , tổng một số số là 0 thì phải có ít nhất một số chẵn $\Rightarrow c_1.c_2...c_7$ chia hết cho 2, suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 15: Cho $P = (a+b)(b+c)(c+a) - abc$ với a, b, c là các số nguyên.

Chứng minh rằng nếu $a + b + c$ chia hết cho 4 thì P chia hết cho 4.

(Tuyển sinh lớp 10, Trường THPT chuyên Chu Văn An, Amsterdam, Vòng 2, năm học 2005 - 2006)

Giải

Tìm cách giải.

Ta có $P=(a+b)(b+c)(c+a)-abc=(a+b)\left(bc+ab+ac+c^2\right)-abc$

$=(a+b)ab+abc+(a+b)c(a+b+c)-2abc$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)-2abc$

Do $a+b+c$ chia hết cho 4 nên trong 3 số a, b, c có ít nhất một số chẵn.

Suy ra 2abc chia hết cho 4.

Mà $(a+b+c)(ab+bc+ca)$ chia hết cho 4 suy ra P chia hết cho 4.

C. Bài tập vận dụng

8.1. Có thể tìm được số tự nhiên n để n^2+n+1 chia hết cho 2025 hay không?

Hướng dẫn giải – đáp số

Xét chữ số tận cùng n ta có:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2+n+1	1	3	7	3	1	1	3	7	3	1

$\Rightarrow n^2+n+1$ không chia hết cho 5 $\Rightarrow n^2+n+1$ không chia hết cho 2025.

8.2. a) Chứng minh rằng n^3-n+2 không chia hết cho 6 với mọi số tự nhiên n.

b) Chứng minh rằng n^3-n chia hết cho 24 với mọi số tự nhiên n lẻ.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có: $n^3-n=n(n-1)(n+1)$

$n-1; n$ là hai số nguyên liên tiếp nên $n^3-n \vdots 2$

$n-1; n; n+1$ là ba số nguyên liên tiếp nên $n^3-n \vdots 3$

$\Rightarrow n^3-n \vdots 6 \Rightarrow n^3-n+2$ không chia hết cho 6.

b) Ta có: $n^3-n=n(n-1)(n+1)$

Với n là số lẻ, đặt $n=2k+1$, biểu thức có dạng:

$(2k+1)2k(2k+2)=4k(2k+1)(k+1)$

Ta có k và $k+1$ là hai số nguyên liên tiếp

$\Rightarrow k(k+1) \vdots 2 \Rightarrow 4(2k+1)k(k+1) \vdots 8$

Với $k \vdots 3$ thì $4(2k+1)k(k+1) \vdots 3$

Với $k \vdots 3$ dư 1 thì $(2k+1) \vdots 3 \Rightarrow 4(2k+1)k(k+1) \vdots 3$

Với $k \vdots 3$ dư 2 thì $(2k+1) \vdots 3 \Rightarrow 4(2k+1)k(k+1) \vdots 3$

Vậy $4(2k+1)k(k+1) \vdots 3$ với k là số tự nhiên

Mà ƯCLN$(3;8)=1$ nên $n^3-n\vdots 24$.

8.3. Cho a và b là các số nguyên sao cho a^2+b^2 chia hết cho 13. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một trong hai số $2a+3b; 2b+3a$ chia hết cho 13.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $(2a+3b)(2b+3a)=6(a^2+b^2)+13ab$

Mà $a^2+b^2\vdots 13$ và $13ab\vdots 13$ nên $6(a^2+b^2)+13ab\vdots 13$

$\Rightarrow (2a+3b)(2b+3a)\vdots 13$

Vậy tồn tại ít nhất một trong hai số $2a+3b; 2b+3a$ chia hết cho 13.

8.4. Cho a, b, c là các số nguyên, chứng minh rằng $(a^3+b^3+c^3)$ chia hết cho 3 khi và chỉ khi $(a+b+c)$ chia hết cho 3.

Hướng dẫn giải – đáp số

Xét $(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c)=(a^3-a)+(b^3-b)+(c^3-c)$

Mà $a^3-a\vdots 3; b^3-b\vdots 3; c^3-c\vdots 3 \Rightarrow (a^3+b^3+c^3)-(a+b+c)\vdots 3$

Suy ra $(a^3+b^3+c^3)\vdots 3$ khi và chỉ khi $(a+b+c)\vdots 3$

8.5. Cho số $M=1993^{1997}+1997^{1993}$

a) Chứng minh rằng M chia hết cho 15.

b) Hỏi M tận cùng bằng chữ số nào?

(Thi Học sinh giỏi Toán 9, Thành phố Hồ Chí Minh, Vòng 1, năm học 1992 —1993)

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Vì $15=3.5$ mà $(3,5)=1$ nên ta chứng minh M chia hết cho 3 và 5.

Áp dụng hằng đẳng thức ta có:

$1993^{1997}-1=1993^{1997}-1^{1997}$ chia hết cho $1993-1$, mà $1993-1$ chia hết cho 3 nên $(1993^{1997}-1)$ chia hết cho 3.

$1997^{1993}+1=1997^{1993}+1^{1993}$ chia hết cho $1997+1$, mà $1997+1$ chia hết cho 3 nên $(1997^{1993}+1)$ chia hết cho 3.

Do đó $1993^{1997}+1997^{1993}=(1993^{1997}-1)+(1997^{1993}+1)$ chia hết cho 3.

$1993^{1997}-1993=1993\left[(1993^2)^{998}-1\right]$ chia hết cho 1993^2+1, mà 1993^2+1 chia hết cho 5 nên

$1993^{1997}-1993$ chia hết cho 5

$1997^{1993}-1997=1997\left[\left(1997^2\right)^{992}-1\right]$ chia hết cho 1997^2+1, mà 1997^2+1 chia hết cho 5 nên

$1997^{1993}-1997$ chia hết cho 5

Do đó $1993^{1997}-1993+1997^{1993}-1997$ chia hết cho 5

$\Rightarrow 1993^{1997}+1997^{1993}-3990$ chia hết cho 5

$\Rightarrow 1993^{1997}+1997^{1993}$ chia hết cho 5

Suy ra M chia hết cho 15.

b) Ta có $1993^{1997}+1997^{1993}$ chia hết cho 5 nên M có tận cùng là 0 hoặc 5.

Mặt khác $1993^{1997}+1997^{1993}$ là chẵn nên M có tận cùng là 0.

8.6. Chứng minh rằng $A=2903^n-803^n-464^n+261^n$ chia hết cho 1897.

(Thi vô địch toán Hunggary, năm 1978)

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng công thức $a^n-b^n \vdots a-b$ với a, b, n là số tự nhiên $a\neq b$

$2903^n-803^n \vdots 2903-803 \Rightarrow 2903^n-803^n \vdots 2100$

$464^n-261^n \vdots 464-261 \Rightarrow 464^n-261^n \vdots 203$

Mà $2100 \vdots 7; 203 \vdots 7 \Rightarrow 2903^n-803^n-\left(464^n-261^n\right) \vdots 7$ hay $A \vdots 7$

$2903^n-464^n \vdots 2903-464 \Rightarrow 2903^n-464^n \vdots 2439$

$803^n-261^n \vdots 803-261 \Rightarrow 803^n-261^n \vdots 542$

Mà $2439 \vdots 271; 542 \vdots 271 \Rightarrow A=2903^n-464^n-\left(803^n-261^n\right) \vdots 271 \Rightarrow A \vdots 271$

Mà ƯCLN$(7;271)=1 \Rightarrow A \vdots 7.271$ hay $A \vdots 1897$

8.7. Cho X là một tập hợp gồm 700 số nguyên dương đôi một khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2006. Chứng minh rằng trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho $x-y$ thuộc tập hợp $E=\{3;6;9\}$

(Tuyển sinh lớp 10, Trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, Vòng 2, năm học 2006 - 2007)

Hướng dẫn giải – đáp số

Cách 1. Chia dãy các số nguyên dương từ 1 đến 2006 thành 201 đoạn: $[1;10]$, $[11;20]$, $[21;30]$,…., $[1991;2000]$, $[2001;2006]$. Vì X có 700 số nguyên dương khác nhau nên theo nguyên lí Đi-rich lê, tồn tại ít nhất 4 số trong 700 số trên thuộc cùng một đoạn. Mặt khác, với 4 số bất kì, luôn tồn tại ít nhất 2 số khi chia cho 3 có cùng số dư, hiệu của hai số đó chia hết cho 3, suy ra hiệu hai số này thuộc tập hợp $E=\{3;6;9\}$.

Cách 2.

Chia X thành 3 tập hợp như sau:

$A=\{x/x=3k+1, k\in\mathbb{N}\}$;

$B = \{x / x = 3k + 2, k \in \mathbb{N}\}$;

$C = \{x / x = 3k + 3, k \in \mathbb{N}\}$;

Có 700 số được chia thành 3 tập hợp, theo nguyên lí Đi-rich lê, tồn tại một tập hợp có ít nhất 234 phần tử. Trong tập hợp này luôn tồn tại hai số cách nhau 3 hoặc 6 đơn vị. Thật vậy nếu các số trong tập hợp chỉ các nhau ít nhất 9 đơn vị thì số lớn nhất trong tập hợp không nhỏ hơn $9.233 = 2097 > 2006$, mâu thuẫn với giả thiết. Suy ra trong X luôn tồn tại hai số cách nhau 3 hoặc 6. Vậy trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho $x - y$ thuộc tập hợp $E = \{3; 6; 9\}$.

8.8. Chứng minh rằng nếu m chia hết cho 2 thì $(m^3 + 20m)$ chia hết cho 48, với m là một số nguyên.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Bình Phước, năm học 2012 - 2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $m = 2k \quad (k \in \mathbb{Z})$

Ta có $m^3 + 20m = 8k^3 + 40k = 8k(k^2 + 5)$

Xét k chẵn $\Rightarrow 8k \vdots 16 \Rightarrow 8k(k^2 + 5) \vdots 16$

Xét k lẻ $\Rightarrow k^2 + 5 \vdots 2 \Rightarrow 8(k^2 + 5) \vdots 16 \Rightarrow 8k(k^2 + 5) \vdots 16$

Xét $k \vdots 3 \Rightarrow 8k(k^2 + 5) \vdots 3$

Xét k không chia hết cho 3: $k = 3m \pm 1 \Rightarrow k^2 = 9m^2 \pm 6m + 1$

$\Rightarrow k^2 + 5 = 9m^2 \pm 6m + 6 \vdots 3 \Rightarrow 8k(k^2 + 5) \vdots 3$

Mà ƯCLN $(3;16) = 1$ nên $8k(k^2 + 5) \vdots 48$ hay $(m^3 + 20m)$ chia hết cho 48.

8.9 Với a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $4a^2 + 3ab - 11b^2$ chia hết cho 5 thì $a^4 - b^4$ chia hết cho 5.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Hải Dương, năm học 2012 - 2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $4a^2 + 3ab - 11b^2 = 4a^2 + 3ab - b^2 - 10b^2 = (4a - b)(a + b) - 10b^2$

$4a^2 + 3ab - 11b \vdots 5 \Leftrightarrow (4a - b)(a + b) \vdots 5$ (vì $10b^2 \vdots 5$)

- *Trường hợp 1.* $4a - b \vdots 5 \Leftrightarrow 5a - (a + b) \vdots 5 \Leftrightarrow a + b \vdots 5$

Mà $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$ nên $a^4 - b^4 \vdots 5$

- *Trường hợp 2.* $a + b \vdots 5$ mà $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$ nên $a^4 - b^4 \vdots 5$

Vậy $4a^2 + 3ab - 11b^2$ chia hết cho 5 thì $a^4 - b^4$ chia hết cho 5.

8.10. Chứng minh rằng nếu tổng hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng lập phương của chúng chia hết cho 9.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Vĩnh Long, năm học 2012 - 2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt hai số nguyên đó là a và b thì $a+b\,\vdots\,3$

Xét $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)\left[(a+b)^2-3ab\right]\vdots\,3$

$\Rightarrow (a+b)\left[(a+b)^2-3ab\right]\vdots\,9$ suy ra $a^3+b^3\,\vdots\,9$

8.11. Cho $A=n^{2012}+n^{2011}+1$. Tìm tất cả các số tự nhiên n để A nhận giá trị là một số nguyên tố.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Nghệ An, năm học 2011 - 2012)

Hướng dẫn giải – đáp số

Xét $n=0$ thì $A=1$, không phải số nguyên tổ.

Xét với $n=1$ thì $A=3$ là số nguyên tố.

Xét $n\ge 2$.

Ta có $A=n^{2012}-n^2+n^{2011}-n+n^2+n+1$

$=n^2\left(n^{3670}-1\right)+n\left(n^{3670}-1\right)+\left(n^2+n+1\right)$

Mà $n^{3670}-1=\left(n^3\right)^{670}-1\,\vdots\,n^3-1; n^3-1\,\vdots\,n^2+n+1\Rightarrow n^{3670}-1\,\vdots\,n^2+n+1\Rightarrow A\,\vdots\,n^2+n+1; n^2+n+1>1$ và

$n^2+n+1<A$ nghĩa là A không phải là số nguyên tố với $n\ge 2$. Vậy chỉ có $n=1$ thỏa mãn.

8.12. Cho đa thức bậc ba $f(x)$ với hệ số của x^3 là một số nguyên dương và biết $f(5)-f(3)=2020$.

Chứng minh rằng $f(7)-f(1)$ là hợp số.

Hướng dẫn giải – đáp số

Theo đề bài $f(x)$ có dạng $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\quad \left(a\in\mathbb{Z}^+\right)$

Ta có: $2020=f(5)-f(3)=\left(5^3-3^3\right)a+\left(5^2-3^2\right)b+(5-3)c=98a+16b+2c$

$\Rightarrow 16b+2c=(2020-98a)$

Ta có: $f(7)-f(1)=\left(7^3-1^3\right)a+\left(7^2-1^2\right)b+(7-1)c$

$=342a+48b+6c=342a+3(16b+2c)$

$=342a+3(2020-98a)=6060+48a\,\vdots\,3$

Vậy $f(7)-f(1)$ là hợp số.

8.13. Cho số nguyên k.

a) Chứng minh $\left(k^2+3k+5\right)$ chia hết cho 11 khi và chỉ khi $k=11t+4$ với t là số nguyên.

b) Chứng minh $\left(k^2+3k+5\right)$ không chia hết cho 121.

(Tuyển sinh lớp 10, chuyên toán, Trường Phổ Thông Năng Khiếu, ĐH QG TP Hồ Chỉ Minh, năm học l996 - 1997)

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có $k^2+3k+5=(k-4)^2+11(k-1)$. Suv ra k^2+3k+5 chia hết cho 11 khi

và chỉ khi $(k-4)^2$ chia hết cho 11. Do 11 là số nguyên tố nên điều này chỉ xảy ra khi $k-4$ chia hết cho 11 hay $k=11t+4$ với t là số nguyên.

b) Giả sử có k nguyên sao cho (k^2+3k+5) chia hết cho 121. Khi đó (k^2+3k+5) chia hết cho 11. Theo câu a) thì $k=11t+4$, thay vào ta có:

$k^2+3k+5=(k-4)^2+11(k-1)=121t^2+121t+33$ không chia hết cho 121 (vì 33 không chia hết cho 121).

Mâu thuẫn.

Vậy (k^2+3k+5) không chia hết cho 121.

8.14. Cho a,b, c khác 0 thỏa mãn điều kiện: $(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$. Chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 3.

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ giả thiết ta có:

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2ab^2c+2bc^2a+2bca^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

$\Rightarrow 2abc(a+b+c)=0 \Rightarrow a+b+c=0$ vì $abc\neq 0$

Ta có: $a^3+b^3+c^3=a^3+b^3-(a+b)^3=a^3+b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3$

$=-3ab(a+b)=3abc\vdots 3$

8.15. Cho $A(n)=n^2(n^4-1)$. Chứng minh rằng $A(n)$ chia hết cho 60 với mọi số tự nhiên n.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có:

$A(n)=n^2(n^2-1)(n^2+1)=n^2(n-1)(n+1)(n^2+1)$

Nếu n chẵn $\Rightarrow n^2\vdots 4 \Rightarrow A\vdots 4$.

Nếu n lẻ $\Rightarrow (n-1)(n+1)\vdots 4 \Rightarrow A\vdots 4$.

- Ta có $n-1; n.n+1$ là ba số nguyên liên tiếp nên $(n-1)n(n+1)\vdots 3 \Rightarrow A\vdots 3$

- Nếu $n\vdots 5$ thì $A\vdots 5$

Nếu $n\vdots 5$ dư 1 hoặc 4 thì $(n-1)n(n+1)\vdots 5 \Rightarrow A\vdots 5$

Nếu $n:5$ dư 2 hoặc 3 $\Rightarrow n^2\vdots 5$ dư 4 $\Rightarrow n^2+1\vdots 5 \Rightarrow A\vdots 5$.

Mà 3; 4; 5 nguyên tố cùng nhau từng đôi một nên $A\vdots 3.5.4$ hay $A\vdots 60$.

8.16. Cho $P=(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

a) Phân tích P thành nhân tử.

b) Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số nguyên mà $a+b+c$ chia hết 6 thì $P-3abc$ cũng chia hết cho 6.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có: $P=(a+b)\left(bc+ac+c^2+ac\right)+abc$

$=(a+b)\left[c(a+b+c)+ab\right]+abc$

$=(a+b)c(a+b+c)+(a+b)ab+abc$

$=(a+b)c(a+b+c)+ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

b) Từ $a+b+c\vdots 6\Rightarrow P\vdots 6$

$a+b+c\vdots 6\Rightarrow a+b+c\vdots 2\Rightarrow a,b,c$ ít nhất tồn tại một số chẵn

$\Rightarrow abc\vdots 2\Rightarrow 3abc\vdots 6\Rightarrow P-3abc\vdots 6$.

8.17. Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $a^5+b^5=4\left(c^5+d^5\right)$.

Chứng minh rằng: $a+b+c+d$ chia hết cho 5.

(Thi học sinh giỏi toán 9, tỉnh Quảng Bình, năm học 2010 - 2011)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $a^5+b^5+c^5=5\left(c^5+d^5\right)\vdots 5$

Xét $a^5+b^5+c^5+d^5-(a+b+c+d)=\left(a^5-a\right)+\left(b^5-b\right)+\left(c^5-c\right)+\left(d^5-d\right)$

Mà $a^5-a=a\left(a^4-1\right)=a\left(a^2-1\right)\left(a^2+1\right)$

- Nếu $a\vdots 5\Rightarrow a^5-a\vdots 5$

- Nếu $a=5k\pm 1$ thì $a^2-1\vdots 5\Rightarrow a^5-a\vdots 5$

- Nếu $a=5k\pm 2$ thì $a^2+1\vdots 5\Rightarrow a^5-a\vdots 5$

Vậy với a là số nguyên thì $a^5-a\vdots 5$.

Tương tự ta có $b^5-b\vdots 5$; $c^5-c\vdots 5$; $d^5-d\vdots 5$

$\Rightarrow a^5+b^5+c^5+d^5-(a+b+c+d)\vdots 5$

Mà $a^5+b^5+c^5+d^5\vdots 5\Rightarrow a+b+c+d\vdots 5$

8.18. Cho $A=\dfrac{a^3}{24}+\dfrac{a^2}{8}+\dfrac{a}{12}$ với a là số tự nhiên chẵn. Hãy chứng minh A có giá trị nguyên.

Hướng dẫn giải – đáp số

Tacó: $A=\dfrac{a^3+3a^2+2a}{24}=\dfrac{a(a+1)(a+2)}{24}$

$a;a+1;a+2$ lả các số nguyên liên tiếp $\Rightarrow a(a+1)(a+2)\vdots 3$ (1)

Vì a là số chẵn nên ta đặt $a=2k\quad (k\in\mathbb{N})$.

$$A=\frac{4k(k+1)(2k+1)}{24}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$k;k+1$ là các số nguyên liên tiếp $\Rightarrow k(k+1)\vdots 2\Rightarrow a(a+1)(a+2)\vdots 4$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A\in\mathbb{Z}$

8.19. Cho $a_n=2^{2n+1}+2^{2n+1}+1$ và $b_n=2^{2n+1}-2^{2n+1}+1$. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, có một và chỉ một trong 2 số a_n hoặc b_n chia hết cho 5.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $a_n+b_n=2.2^{2n+1}+2=\left(2^2\right)^{n+1}+2=4^{n+1}+2$.

Với n là số tự nhiên thì 4^{n+1} chỉ có thể tận cùng là 4 hoặc 6 $\Rightarrow a_n+b_n$ chỉ có thể tận cùng là 6 hoặc 8

$\Rightarrow a_n+b_n$ không chia hết cho 5 $\Rightarrow a_n$ và b_n không cùng chia hết cho 5.(1)

Xét $a_n.b_n=\left(2^{2n+1}+2^{2n+1}+1\right)\left(2^{2n+1}-2^{n+1}+1\right)$

$=\left(2^{2n+1}+1\right)^2-\left(2^{n+1}\right)^2=4^{2n+1}+2.2^{2n+1}+1-2^{2n+2}=4^{2n+1}\vdots 5$ (vì $2n+1$ lẻ)

$A_n.b_n\vdots 5$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra có một và chỉ một trong 2 số a_n hoặc b_n chia hết cho 5.

8.20. Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $p^2-1\vdots 24$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p^2 chia 3 dư 1

$\Rightarrow p^2-1\vdots 3$ (1)

Mặt khác p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p-1;p+1$ là hai số chẵn liên tiếp.

$\Rightarrow (p-1)(p+1)\vdots 8\Rightarrow p^2-1\vdots 8$ (2)

* Mả $(3;8)=1$, từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Chương II

PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Chuyên đề 9. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ. TÍNH CHẤT PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Phân thức đại số

- Một phân thức đại số (hay nói gọn là phân thức) là biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A,B là những đa thức và B khác đa thức 0. A được gọi là tử thức (hay tử), B được gọi là mẫu thức (hay mẫu).
- Mỗi đa thức cũng được gọi là một phân thức có mẫu thức bằng 1.
- Mỗi số thực a bất kỳ cũng là một phân thức.
- Hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$ gọi là bằng nhau nếu $A.D = B.C.$

$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ nếu $A.D = B.C.$

2. Tính chát cơ bản của phân thức

♦ *Tính chất cơ bản.*

- Nếu nhân cả tử và mẫu của một phân thức với cùng một đa thức khác 0 thì được một phân thức mới bằng phân thức đã cho:

$\frac{A}{B} = \frac{A.M}{B.\mathrm{M}}$(M là đa thức khác đa thức 0).

- Nếu chia cả tử và mẫu của một phân thức cho một nhân tử chung của chúng thì được một phân thức mới bằng phân thức đã cho:

$\frac{A}{B} = \frac{A:N}{B:N}$(N là nhân tử chung 0).

♦ *Quy tắc đổi dấu.*

Nếu đổi dấu cả tử và mẫu của một phân thức thì được một phân thức bằng phân thức đã cho: $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}.$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Tìm đa thức A, biết rằng: $\frac{4x^2 - 16}{x^2 + 2x} = \frac{A}{x}.$

Giải

Tìm cách giải.

Để tìm đa thức A, chúng ta dùng $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ khi và chỉ khi: $A.D = B.C.$

Trình bày lời giải

Từ $\frac{4x^2-16}{x^2+2x}=\frac{A}{x}$. suy ra

$$A=\frac{x\left(4x^2-16\right)}{x^2+2x}=\frac{x\left[\left(2x\right)^2-4^2\right]}{x^2+2x}=\frac{x\left(2x-4\right)\left(2x+4\right)}{x\left(x+2\right)}=\frac{x.2\left(x-2\right).2\left(x+2\right)}{x\left(x+2\right)}$$
$$=4\left(x-2\right)=4x-8$$

Ví dụ 2: Cho $0<x<y$ và $2x^2+2y^2=5xy$. Tính giá trị của $P=\frac{2016x+2017y}{3x-2y}$.

Giải

Tìm cách giải. Quan sát, chúng ta nhận thấy giả thiết chứa đa thức bậc hai đối với biến x, y, còn kết luận là phân thức mà tử và mẫu là đa thức bậc nhất đối với biến x, y. Do vậy chúng ta tìm mối quan hệ giữa x và y từ giả thiết để biểu diễn x theo y hoặc ngược lại. Với suy nghĩ ấy, chúng ta phân tích đa thức thành nhân tử từ điều kiện thứ hai.

Trình bày cách giải

Từ $2x^2+2y^2=5xy \Leftrightarrow 2x^2-5xy+2y^2=0$

$2x^2-4xy-xy+2y^2=0 \Leftrightarrow \left(2x-y\right)\left(x-2y\right)=0$

Ta có $y>x>0 \Rightarrow 2y>x \Rightarrow x-2y<0 \Rightarrow 2x-y=0 \Rightarrow y=2x$

Từ đó ta có: $P=\frac{2016x+2017.2x}{3x-2.2x}=-6050$.

Ví dụ 3: Cho x, y thỏa mãn $x^2+2y^2+2xy-6x-2y+13=0$.

Tính giá trị của biểu thức $H=\frac{x^2-7xy+52}{x-y}$.

Giải

Từ giả thiết suy ra $x^2+2xy+y^2+y^2-6x-2y+13=0$.

$$\Leftrightarrow \left(x+y\right)^2-6\left(x+y\right)+9+y^2+4y+4=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x+y-3\right)^2+\left(y+2\right)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-3=0 \\ y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$$

Từ đó ta có $H=\frac{25-7.5.\left(-2\right)+52}{5+2}=21$.

Ví dụ 4: Cho biểu thức $x^2-x-1=0$. Tính giá trị

$$Q=\frac{x^6-3x^5+3x^4-x^3+2020}{x^6-x^3-3x^2-3x+2020}.$$

Giải

Tìm cách giải. Ta không thể tìm x để rồi thay vào biểu thức được, bởi kết quả x không phải số tự nhiên, thay vào Q tính rất phức tạp. Do vậy ta có hai định hướng:

- Hướng suy nghĩ thứ nhất, viết tử thức và mẫu thức dưới dạng $\left(x^2-x-1\right).\mathrm{q(x)}+\mathrm{r(x)}$ xem phần phép chia đa thức, từ đó ta tìm được Q.
- Hướng suy nghĩ thứ hai, chúng ta quan sát thấy có dạng hằng đẳng thức, biến đổi giả thiết khéo léo để xuất hiện thành tử thức và mẫu thức.

Trình bày lời giải

Cách 1.

- Ta có:

$$x^6-3x^5+3x^4-x^3+2020=\left(x^2-x-1\right)\left(x^4-2x^3+2x^2-x+1\right)+2021$$

- Ta có:

$$x^6-x^3-3x^2-3x+2020=\left(x^2-x-1\right)\left(x^4+x^3+2x^2+2x+1\right)+2021$$

Với $x^2-x-1=0$ thì tử số là 2011; mẫu số là 2021.

Vậy $Q=\dfrac{2021}{2021}=1$.

Cách 2.

- Ta có: $x^2-x-1=0\Rightarrow x^2=x+1\Rightarrow x^6=\left(x+1\right)^3$

$\Rightarrow x^6=x^3+3x^2+3x+1\Rightarrow x^6-x^3-3x^2-3x=1$

Suy ra mẫu số bằng: $1+2020=2021$.

- Ta có: $x^2-x-1=0\Rightarrow x^2-x=1\Leftrightarrow\left(x^2-x\right)^3=1$

$\Rightarrow x^6-3x^5+3x^4-x^3=1$

Suy ra tử số bằng: $1+2020=2021$.

Vậy $Q=\dfrac{2021}{2021}=1$.

Ví dụ 5: Cho $P=\dfrac{n^2+4}{n+5}$ với n là số tự nhiên. Hãy tìm tất cả các số tự nhiên n trong khoảng từ 1 đến 2020 sao cho giá trị của P chưa tối giản.

Giải

Ta có: $P=\dfrac{n^2+4}{n+5}=n-5+\dfrac{29}{n+5}$ với $n\in N$.

Để phân số P chưa tối giản thì ƯCLN$\left(29;n+5\right)=d\left(d\neq 1\right)$

Khi đó $n+5\,\vdots\, d$ và $29\,\vdots\, d\Rightarrow d=29\Rightarrow n+5\,\vdots\,29$

Hay $n+5=29k\left(k\in N^{+}\right)\Rightarrow n=29k-5$

Mà $1<n<2020\Rightarrow 1<29k-5<2020\Leftrightarrow 29k<2025$

$\Rightarrow \frac{6}{29}<k<69\frac{24}{29}\Rightarrow k\in\{1,2,3....,69\}$

Vậy các số tự nhiên n cần tìm có dạng $n=29k-5$ với $k\in\{1,2,3....,69\}$

Ví dụ 6. Với giá trị nào của x thì:

a) Giá trị của phân thức $A=\frac{10}{x-9}$ dương;

b) Giá trị của phân thức $B=\frac{-10}{x+21}$ âm;

c) Giá trị của phân thức $C=\frac{x-21}{x-10}$ dương.

Giải

Tìm cách giải. Khi giải những dạng toán này chứng ta cần sử dụng kiến thức sau:

- Phân thức $\frac{A}{B}$ có giá trị dương khi và chỉ khi A và B cùng dấu.
- Phân thức $\frac{A}{B}$ có giá trị âm khi và chỉ khi A và B trái dấu.

Trình bày lời giải

a) $\frac{10}{x-9}>0\Leftrightarrow x-9>0\Leftrightarrow x>9.$

b) $\frac{-10}{x+21}<0\Leftrightarrow x+21<0\Leftrightarrow x<-21.$

c) $\frac{x-21}{x-10}>0\Leftrightarrow x-21$ và $x-10$ cùng dấu; mà $x-10>x-21$ nên $x-21>0$ hoặc $x-10<0\Leftrightarrow x>21$ hoặc $x<10.$

C. Bài tập vận dụng

9.1.

a) Tìm đa thức A, cho biết $\frac{A}{x-2}=\frac{x^2+3x+2}{x^2-4}.$

b) Tìm đa thức M, cho biết $\frac{M}{x-1}=\frac{x^2+3x+2}{x+1}.$

Hướng dẫn giải – đáp số

Dùng định nghĩa, ta có:

a) $A=(x+1)$. b) $M=x^2+x-2$.

Nhận xét. Bạn có thể dùng tính chất cơ bản của phân thức để giải bài này.

9.2. Cho a và b là các số thỏa mãn $a>b>0$ và $a^3-a^2b+ab^2-6b^3=0$. Tính giá trị của biểu thức $B=\dfrac{a^4-4b^4}{b^4-4a^4}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ $a^3 - a^2b + ab^2 - 6b^3 = 0$

$\Rightarrow a^3 - 2a^2b + a^2b - 2ab^2 + 3ab^2 - 6b^3 = 0$

$\Leftrightarrow (a-2b)\left(a^2 + ab + 3b^2\right) = 0$

Vì $a > b > 0 \Rightarrow a^2 + ab + 3b^2 > 0$ do đó $a - 2b = 0 \Rightarrow a = 2b$

Vậy $B = \dfrac{a^4 - 4b^4}{b^4 - 4a^4} = \dfrac{16b^4 - 4b^4}{b^4 - 64b^4} = \dfrac{12b^4}{-63b^4} = \dfrac{-4}{21}$.

9.3. Cho a, b thỏa mãn $10a^2 - 3b^2 + 5ab = 0$ và $9a^2 \neq b^2$

Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{2a-b}{3a-b} + \dfrac{5b-a}{3a+b}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $P = \dfrac{(2a-b)(3a+b)+(5b-a)(3a-b)}{(3a-b)(3a+b)}$

$P = \dfrac{6a^2 + 2ab - 3ab - b^2 + 15ab - 5b^2 + ab}{9a^2 - b^2} = \dfrac{3a^2 - 6b^2 + 15ab}{9a^2 - b^2}$

Từ giả thiết $10a^2 - 3b^2 + 5ab = 0 \Rightarrow 5ab = 3b^2 - 10a^2$.

Từ đó suy ra $P = \dfrac{3a^2 - 6b^2 + 9b^2 - 30a^2}{9a^2 - b^2} = \dfrac{-27a^2 + 3b^2}{9a^2 - b^2} = -3$

9.4. Số nào lớn hơn: $A = \dfrac{2020 - 2015}{2020 + 2015}$ và $B = \dfrac{2020^2 - 2015^2}{2020^2 + 2015^2}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $A = \dfrac{2020 - 2015}{(2020 + 2015)} = \dfrac{2020^2 - 2015^2}{(2020 + 2015)^2} < \dfrac{2020^2 - 2015^2}{2020^2 + 2015^2}$

$\Rightarrow A < B$

9.5. Với giá trị nào của x thì:

a) Giá trị của phân thức $A = \dfrac{3}{x-2}$ dương;

b) Giá trị của phân thức $B = \dfrac{-3}{x-3}$ âm;

c) Giá trị của phân thức $C = \dfrac{x-1}{x-5}$ dương.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $A = \dfrac{3}{x-2} > 0 \Leftrightarrow x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

b) $B=\dfrac{-3}{x-3}<0 \Leftrightarrow x-3<0 \Leftrightarrow x<3.$

c) $C=\dfrac{x-1}{x-5}>0 \Leftrightarrow x-1$ và $x-5$ cùng dấu; mà $x-1>x-5$ nên $x-5>0$ hoặc $x-1<0 \Leftrightarrow x>5$ hoặc $x<1$.

9.6. Chứng minh với mọi số nguyên dương n thì:

a) $\dfrac{n^3-1}{n^5+n+1}$ là phân số không tối giản.

b) $\dfrac{6n+1}{8n+1}$ là phân số tối giản.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có $\dfrac{(n-1)(n^2+n+1)}{n^5-n^2+n^2+n+1}=\dfrac{(n-1)(n^2+n+1)}{n^2(n^3-1)+(n^2+n+1)}$

$\dfrac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n^3-n^2+1)(n^2+n+1)}$ vì với số nguyên dương n thì $n^2+n+1>1$ nên $\dfrac{n^3-1}{n^5+n+1}$ là phân số không tối giản.

b) Đặt ƯCLN$(6n+1;8n+1)=d$ với $d \in N^*$

$\Rightarrow 6n+1 \vdots d \Rightarrow 24n+4 \vdots d$

$8n+1 \vdots d \Rightarrow 24n+3 \vdots d$

$\Rightarrow (24n+4)-(24n+3) \vdots d \Leftrightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d=1.$

$\Rightarrow$ ƯCLN$(6n+1;8n+1)=1 \Rightarrow$ Phân số tối giản.

9.7. Tìm giá trị lớn nhất của phân thức sau:

$A=\dfrac{3}{x^2+2x+4}$; $B=\dfrac{5}{4x^2-4x+3}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có $A=\dfrac{3}{(x+1)^2+3} \le \dfrac{3}{3}=1$

$\Rightarrow$ Giá trị lớn nhất của A là 1 khi $x=-1$.

b) Ta có $B=\dfrac{5}{(2x-1)^2+2} \le \dfrac{5}{2}$

Giá trị lớn nhất của B là $\dfrac{5}{2}$ khi $x=\dfrac{1}{2}$.

9.8. Cho $2x+y=11z; 3x-y=4z$. Tính giá trị $Q=\dfrac{2x^2-3xy}{x^2+3y^2}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ $2x+y=11z$ và $3x-y=4z$ suy ra $5x=15z \Rightarrow x=3z$

Từ $2x+y=11z$ và $x=3z$ suy ra $y=5z$.

Thay vào biểu thức: $Q=\dfrac{2x^2-3xy}{x^2+3y^2}=\dfrac{18z^2-45z^2}{9z^2+75z^2}=\dfrac{-9}{28}$

9.9. Cho a, b thỏa mãn $5a^2+2b^2=11ab$ và $a>2b>0$.

Tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{4a^2-5b^2}{a^2+2ab}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ giả thiết: $5a^2+2b^2=11ab \Leftrightarrow (5a-b)(a-2b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5a=b(\text{thỏa mãn})\\ a=2b\ (\text{loại})\end{array}\right.$

Thay $5a=b$ vào A ta được: $A=\dfrac{4a^2-125a^2}{a^2+10a^2}=-11$.

9.10. Cho $4a^2+b^2=5ab$ và $2a>b>0$. Tính giá trị $\mathrm{P}=\dfrac{ab}{4a^2-b^2}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ giả thiết: $4a^2+b^2=5ab$

$\Leftrightarrow 4a^2+b^2-5ab=0 \Leftrightarrow 4a^2-4ab-ab+b^2=0$

$\Leftrightarrow (4a-b)(a-b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4a=b(\text{loại})\\ a=b(\text{thỏa mãn})\end{array}\right.$

Suy ra $a=b$. Thay vào P ta được: $P=\dfrac{a^2}{3a^2}=\dfrac{1}{3}$.

9.11. Cho x thỏa mãn $\dfrac{x}{x^2-x+1}=\dfrac{1}{2}$. Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{x^4-3x^3+18x-1}{x^3-2x^2+7x+1}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ giả thiết: $\dfrac{x}{x^2-x+1}=\dfrac{1}{2}$ suy ra $x^2-x+1=2x \Leftrightarrow x^2-3x+1=0$

Ta có: $x^4-3x^2+18x-1=(x^2-3x+1)(x^2-1)+15x$.

$x^3-2x^2+7x+1=(x^2-3x+1)(x+1)+9x$

Với $x^2-3x+1=0$ ta có $P=\dfrac{(x^2-3x+1)(x^2-1)+15x}{(x^2-3x+1)(x+1)+9x}=\dfrac{15x}{9x}=\dfrac{5}{3}$.

9.12. Cho x,y thỏa mãn $x^2-2xy+2y^2-2x+6y+5=0$. Tính giá trị của biểu thức $N=\dfrac{3x^2y-1}{4xy}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có:

$x^2-2xy+2y^2-2x+6y+5=0 \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2+y^2-2x+2y+4y+5=0$

$\Leftrightarrow (x-y-1)^2+(y+2)^2=0$

Dấu bằng xảy ra khi $x-y-1=0$ và $y+2=0$ hay $y=-2; x=-1$.

Từ đó suy ra $N=\dfrac{3(-1)^2(-2)-1}{4(-1)(-2)}=-\dfrac{7}{8}$

9.13. Cho a, b là hai số nguyên dương khác nhau, thỏa mãn $2a^2+a=3b^2+b$.

Chứng minh rằng $\dfrac{a-b}{2a+2b+1}$ là phân số tối giản.

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Quảng Ngãi, năm học 2013-2014)

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ $2a^2+a=3b^2+b \Leftrightarrow 2a^2-2b^2+a-b=b^2 \Leftrightarrow (a-b)(2a+2b+1)=b^2$ (1)

Đặt ƯCLN $(a-b;2a+2b+1)=d \Rightarrow a-b \vdots d; 2a+2b+1 \vdots d$ và $b \vdots d$

$\Rightarrow [2a+2b+1-2(a-b)] \vdots d \Rightarrow 4b+1 \vdots d$ mà $b \vdots d$ hay $d=1$

$\Rightarrow a-b$ và $2a+2b+1$ nguyên tố cùng nhau suy ra $\dfrac{a-b}{2a+2b+1}$ là phân số tối giản.

Chương II

PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Chuyên đề 10. RÚT GỌN PHÂN THỨC

A. Kiến thức cần nhớ

Muốn rút gọn phân thức ta có thể:

Phân tích tử và mẫu thành nhân tử (nếu cần) để tìm nhân tử chung;

Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung.

Chú ý: Có khi cần đổi dấu ở tử hoặc mẫu để nhận ra nhân tử chung của tử và mẫu (lưu ý tới tính chất $A=-(-A)$).

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Rút gọn phân thức sau:

a) $A=\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+x-12}$;

b) $B=\dfrac{a^4-5a^2+4}{a^4-a^2+4a-4}$;

c) $C=\dfrac{x^3+x^2-4x-4}{x^3+8x^2+17x+10}$.

Giải

a) Ta có:

$$A=\frac{x^2+2x+1-9}{x^2+4x-3x-12}=\frac{(x+1)^2-9}{x(x+4)-3(x+4)}=\frac{(x+1-3)(x+1+3)}{(x+4)(x-3)}$$

$$A=\frac{(x-2)(x+4)}{(x+4)(x-3)}=\frac{x-2}{x-3}.$$

b) Ta có: $B=\dfrac{a^4-a^2-4a^2+4}{a^4-(a^2-4a+4)}=\dfrac{a^2\left(a^2-1\right)-4\left(a^2-1\right)}{a^4-(a-2)^2}$

$$B=\frac{\left(a^2-1\right)\left(a^2-4\right)}{\left(a^2-a+2\right)\left(a^2+a-2\right)}=\frac{(a-1)(a+1)(a-2)(a+2)}{\left(a^2-a+2\right)(a-1)(a+2)}$$

$$B=\frac{(a+1)(a-2)}{a^2-a+2}.$$

c) Ta có: $C=\dfrac{x^2(x+1)-4(x+1)}{x^3+x^2+7x^2+7x+10x+10}=\dfrac{(x+1)\left(x^2-4\right)}{(x+1)\left(x^2+7x+10\right)}$

$$C=\frac{(x+1)(x-2)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+5)}=\frac{x-2}{x+5}.$$

Ví dụ 2. Cho a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $ab=bc+ca=1$. Rút gọn biểu thức sau:

$$A=\frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)}.$$

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy mẫu thức có thể phân tích thành nhân tử bằng cách sử dụng giả thiết. Do vậy nên thay $1 = ab + bc + ca$ vào mẫu và phân tích đa thức thành nhân tử. Những bài toán rút gọn có điều kiện, chúng ta nên vận dụng và biến đổi khéo léo điều kiện.

Trình bày lời giải

Thay $1 = ab + bc + ca$, ta được $1 + a^2 = a^2 + ab + bc + ca$

$1 = a^2 = (a+b)(a+c)$

Tương tự: $1 + b^2 = (b+c)(c+a)$

$1 + c^2 = (c+a)(c+b)$

Vậy $A = \dfrac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(a+b)(a+c)(b+a)(b+c)(c+a)(c+b)} = 1.$

Ví dụ 3. Cho biểu thức $P = \dfrac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^3 + 14a - 8}$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm giá trị nguyên của a để P nhận giá trị nguyên.

Giải

Tìm cách giải. Khi rút gọn biểu thức, chúng ta cần phân tích tử thức và mẫu thức thành nhân tử.

Để tìm giá trị nguyên của a, chúng ta cần tách phần nguyên và cho phân thức có giá trị nguyên. Chẳng hạn $P = \dfrac{a+1}{a-2}$ thì ta viết $P = 1 + \dfrac{3}{a-2}$, vì 1 là số nguyên nên để P là số nguyên thì $\dfrac{3}{a-2}$ có giá trị nguyên. Do vậy $a-2$ phải là ước số của 3.

Trình bày lời giải

a) Ta có:

$$P = \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^3 + 14a - 8} = \frac{a^2(a-4) - (a-4)}{a^3 - 2a^2 - 5a^2 + 10a + 4a - 8}$$

$$= \frac{(a^2-1)(a-4)}{a^2(a-2) - 5a(a-2) + 4(a-2)} = \frac{(a+1)(a-1)(a-4)}{(a-1)(a-4)(a-2)} = \frac{a+1}{a-2}$$

b) Ta có: $P = 1 + \dfrac{3}{a-2} (a \neq 2)$

Vậy $P \in Z \Leftrightarrow \dfrac{3}{a-2} \in Z \Leftrightarrow a - 2 \in \{\pm 1; \pm 3\} \Leftrightarrow a \in \{-1; 1; 3; 5\}$

Ví dụ 4. Cho phân thức $F(x) = \dfrac{x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2}{x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2}$.

Xác định x để phân thức $F(x)$ có giá trị nhỏ nhất.

Giải

Tìm cách giải. Trong phân thức $F(x)$ thì bậc của tử thức và mẫu thức là 4, khá lớn. Do đó việc tìm giá trị nhỏ nhất gặp nhiều khó khăn, vậy cần rút gọn biểu thức $F(x)$. Khi $F(x)$ viết được dưới dạng phân thức mà tử thức và mẫu thức là bậc hai, ta tìm cực trị bằng cách lấy biểu thức $F(x)-m$, sao cho kết qủa tử thức viết được dưới dạng hằng đẳng thức $(a\pm b)^2$.

Trình bày lời giải

$$F(x)=\frac{x^4+x^3-x^2-2x-2}{x^4+2x^3-x^2-4x-2}=\frac{x^4+x^3+x^2-2x^2-2x-2}{x^4+2x^3+x^2-2x^2-4x-2}$$

$$=\frac{x^2\left(x^2+x+1\right)-2\left(x^2+x+1\right)}{x^2\left(x^2+2x+1\right)-2\left(x^2+2x+1\right)}=\frac{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-2\right)}{\left(x^2+2x+1\right)\left(x^2-2\right)}$$

$$=\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}$$

Xét $F(x)-\frac{3}{4}=\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}-\frac{3}{4}=\frac{4x^2+4x+4-3x^2-6x-3}{4x^2+8x+4}=\frac{\left(x+1\right)^2}{4\left(x+1\right)^2}\geq 0$

Suy ra $F(x)\geq\frac{3}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $F(x)=\frac{3}{4}$ khi $x=1$

Ví dụ 5. Cho biểu thức $B=\frac{x^4-x^3-x+1}{x^4+x^3+3x^2+2\left(x+1\right)}$. Chứng minh rằng biểu thức B không âm với mọi giá trị của x.

Giải

Tìm cách giải. Chứng minh biểu thức không âm với mọi giá trị của x, ta cần phải rút gọn biểu thức. Sau đó chứng tỏ tử thức không âm và mẫu thức dương.

Trình bày lời giải

$$B=\frac{x^3\left(x-1\right)-\left(x-1\right)}{x^2\left(x^2+x+1\right)+2\left(x^2+x+1\right)}=\frac{\left(x-1\right)^2\left(x^2+x+1\right)}{\left(x^2+2\right)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{\left(x-1\right)^2}{x^2+2}$$

$$B=\frac{\left(x-1\right)^2}{x^2+2}\geq 0.$$

Vây B không âm với mọi giá trị của x.

Ví dụ 6. Tính $P=\frac{\left(1986^2+1992\right)\left(1986^2+3972-3\right).1987}{1983.1985.1988.1989}$.

(Thi Học sinh giỏi NewYork (Mỹ) – năm học 1986-1987)

Giải

Tìm cách giải. Bài toán này chứa số khá lớn. Nhiều số gần với 1986, do đó rất tự nhiên đặt $1986 = x$, rồi biểu diễn các số gần với 1986 theo x, ta được biểu thức P biến x. Sau đó rút gọn biểu thức P.

Trình bày lời giải

Đặt $1986 = x$.

Ta có:

$$P = \frac{\left(x^2 - x - 6\right)\left(x^2 + 2x + 3\right)\left(x + 1\right)}{\left(x - 3\right)\left(x - 1\right)\left(x + 2\right)\left(x + 3\right)}$$

$$= \frac{\left(x^2 - 3x + 2x - 6\right)\left(x^2 - x + 3x - 3\right)\left(x + 1\right)}{\left(x - 3\right)\left(x - 1\right)\left(x + 2\right)\left(x + 3\right)}$$

$$= \frac{\left(x - 3\right)\left(x + 2\right)\left(x - 1\right)\left(x + 3\right)\left(x + 1\right)}{\left(x - 3\right)\left(x - 1\right)\left(x + 2\right)\left(x + 3\right)}$$

$P = x + 1$ hay $P = 1996 + 1 = 1997$

Nhận xét. Phương pháp giải bài trên là đại số hóa bằng cách đặt $x = 1986$, sau đó rút gọn phân thức đại số. Nhiều biểu thức số ta có thể giải bằng đại số như trên.

C.Bài tập vận dụng

10.1 Rút gọn biểu thức:

a) $\dfrac{2x^3 - 7x^2 - 12x + 45}{3x^3 - 19x^2 + 33x - 9}$

b) $N = \dfrac{\left(a - 1\right)^4 - 11\left(a - 1\right)^2 + 30}{3\left(a - 1\right)^4 - 18\left(a^2 - 2a\right) - 3}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $\dfrac{2x^3 - 7x^2 - 12x + 45}{3x^3 - 19x^2 + 33x - 9} = \dfrac{2x^3 - 6x^2 - x^2 + 3x - 15x + 45}{3x^3 - 9x^2 - 10x^2 + 30x + 3x - 9}$

$$= \frac{\left(x - 3\right)\left(2x^2 - x - 15\right)}{\left(x - 3\right)\left(3x^2 - 10x + 3\right)} = \frac{\left(2x + 5\right)\left(x - 3\right)}{\left(3x - 1\right)\left(x - 3\right)} = \frac{2x + 5}{3x - 1}$$

b) $N = \dfrac{\left(a - 1\right)^4 - 11\left(a - 1\right)^2 + 30}{3\left(a - 1\right)^4 - 18\left(a^2 - 2a\right) - 3} = \dfrac{\left[\left(a - 1\right)^2 - 5\right]\left[\left(a - 1\right)^2 - 6\right]}{3\left(a - 1\right)^4 - 18\left(a - 1\right)^2 - 15}$

$$N = \frac{\left(a^2 - 2a - 4\right)\left(a^2 - 2a - 5\right)}{3\left[\left(a - 1\right)^2 - 5\right]\left[\left(a - 1\right)^2 - 1\right]} = \frac{a^2 - 2a - 5}{3a^2 - 6a}.$$

10.2. Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{n^3 + 2n^2 - 1}{n^3 + 2n^2 + 2n + 1};$$

$$M = \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 3x + 6}{x^2 + 2x - 8};$$

$$N=\frac{xy^2+y^2\left(y^2-x\right)+1}{x^2y^4+2y^4+x^2+2}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$A=\frac{n^3+2n^2-1}{n^3+2n^2+2n+1}=\frac{n^3+n^2+n^2-1}{n^3+n^2+n^2+n+n+1}$$

$$=\frac{n^2\left(n+1\right)+\left(n-1\right)\left(n+1\right)}{n^2\left(n+1\right)+n\left(n+1\right)+n+1}=\frac{n^2+n-1}{n^2+n+1}$$

$$M=\frac{x^5-2x^4+2x^3-4x^2-3x+6}{x^2+2x-8}=\frac{x^4\left(x-2\right)+2x^2\left(x-2\right)-3\left(x-2\right)}{\left(x-2\right)\left(x+4\right)}$$

$$==\frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2+3\right)}{x+4}$$

$$N=\frac{xy^2+y^2\left(y^2-x\right)+1}{x^2y^4+2y^4+x^2+2}=\frac{y^4+1}{\left(x^2+2\right)\left(y^4+1\right)}=\frac{1}{x^2+2}$$

10.3. Rút gọn biểu thức: $P=\dfrac{abc+a+b+c-\left(ab+bc+ca+1\right)}{a^2b+1-\left(a^2+b\right)}.$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$P=\frac{abc-bc+a-1-ab+b-ac+c}{a^2b-a^2-b+1}=\frac{\left(a-1\right)\left(bc+1-b-c\right)}{\left(b-1\right)\left(a^2-1\right)}$$

$$=\frac{\left(a-1\right)\left(b-1\right)\left(c-1\right)}{\left(b-1\right)\left(a+1\right)\left(a-1\right)}=\frac{c-1}{a+1}.$$

10.4. Tính giá trị của biểu thức sau: $P=\dfrac{\left(2003^2.2013+21.2004-1\right)\left(2003.2008+4\right)}{2004.2005.2006.2007.2008}.$

(Tuyển sinh 10, Trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, năm 2003 – 2004)

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $x=2003$. Ta có:

$$P=\frac{\left[x^2\left(x+10\right)+31\left(x+1\right)-1\right]\left[x\left(x+5\right)+4\right]}{\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)\left(x+4\right)\left(x+5\right)}$$

$$=\frac{\left(x^3+10x^2+31x+30\right)\left(x^2+5x+4\right)}{\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)\left(x+4\right)\left(x+5\right)}$$

Phân tích tử thức thành nhân tử, ta được:

$$P=\frac{(x+2)(x+3)(x+5)(x+1)(x+4)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}=1$$

10.5. Cho a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Rút gọn biểu thức sau:

$$B=\frac{(a^2+2bc-1)(b^2+2ca-1)(c^2+2ab-1)}{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Thay $1=ab+bc+ca,$ ta được:

$a^2+2bc-1=a^2+bc-ab-ca=a(a-b)-c(a-b)=(a-c)(a-b)$

Tương tự: $b^2+2ca-1=(b-c)(b-a); c^2+2ab-1=(c-a)(c-b)$

Vậy

$$B=\frac{(a-b)(a-c)(b-a)(b-c)(c-a)(c-b)}{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}=\frac{-(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}=-1$$

10.6. Cho $A=\frac{x^4+x^3+x+1}{x^4-x^3+2x^2-x+1}$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Chứng minh rằng, A không âm với mọi giá trị của x.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $A=\frac{x^4+x^3+x+1}{x^4-x^3+2x^2-x+1}=\frac{x(x^3+1)+x^3+1}{x^2(x^2-x+1)+x^2-x+1}$

$=\frac{(x+1)^2(x^2-x+1)}{(x^2+1)(x^2-x+1)}=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$

b) $A=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}\geq 0$. Vậy biểu thức A không âm $\forall x$

10.7. Cho phân thức $M=\frac{3x^2+3}{x^4+2x^3+7x^2+2x+6}$.

a) Rút gọn biểu thức M.

b) Tính giá trị lớn nhất của biểu thức M.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $M=\frac{3x^2+3}{x^4+2x^3+7x^2+2x+6}=\frac{3x^2+3}{x^4+x^2+2x^3+2x+6x^2+6}$

$=\frac{3x^2+3}{(x^2+1)(x^2+2x+6)}=\frac{3}{x^2+2x+6}$

b) $x^2+2x+6\ge 5 \Rightarrow \dfrac{3}{x^2+2x+6}\le \dfrac{3}{5}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=-1$

Vậy giá trị lớn nhất của phân thức $M=\dfrac{3}{5}$ là khi $x=-1$

10.8. Rút gọn phân thức:

$$A=\frac{x^5-2x^4+2x^3-4x^2-3x+6}{x^2-x-2} \qquad\qquad Q=\frac{1+x^4+x^8+...+x^{2020}}{1+x^2+x^4+...+x^{2022}}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $A=\dfrac{x^4(x-2)+2x^2(x-2)-3(x-2)}{(x+1)(x-2)}=\dfrac{(x-2)(x^4+2x^2-3)}{(x+1)(x-2)}$

$$=\frac{(x^2+3)(x-1)(x+1)}{x+1}=(x^2+3)(x-1)$$

Ta có: $Q=\dfrac{1+x^4+x^8+...+x^{2020}}{(1+x^4+x^8+...+x^{2020})+(x^2+x^6+x^{10}+...+x^{2022})}$

$$=\frac{1+x^4+x^8+...+x^{2020}}{(1+x^2)(1+x^4+x^8+...+x^{2020})}=\frac{1}{1+x^2}$$

10.9. Cho $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$. Rút gọn biểu thức: $P=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{(\text{ax+by+cz})^2}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$ suy ra: $x=ak; y=bk; z=ck$.

Từ đó ta có $P=\dfrac{a^2k^2+b^2k^2+c^2k^2}{(a^2k^2+b^2k^2+c^2k^2)^2}=\dfrac{k^2(a^2+b^2+c^2)}{k^2(a^2+b^2+c^2)^2}$

Suy ra $P=\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}$

10.10. Cho $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2)+c(a^2+b^2)}{ab+bc+ca-3}=abc.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Xét tử thức ta có:

$ab^2+ac^2+a^2b+bc^2+a^2c+b^2c$
$=\left(ab^2+a^{2b}+abc\right)+\left(ac^2+a^2c+abc\right)+\left(bc^2+bc^2+abc\right)-3abc$
$=ab\left(a+b+c\right)+ac\left(a+b+c\right)+bc\left(a+b+c\right)-3abc$
$=\left(a+b+c\right)\left(ab+ac+bc\right)-3abc$
$=abc\left(ab+ac+bc-3\right)$

Vậy suy ra: $\dfrac{a\left(b^2+c^2\right)+b\left(a^2+c^2\right)+c\left(a^2+b^2\right)}{ab+bc+ca-3}=abc.$

Điều phải chứng minh.

10.11. Chứng minh rằng giá trị biểu thức $P=\dfrac{\left(x^2+a\right)\left(1+a\right)+a^2x^2+1}{\left(x^2-a\right)\left(1-a\right)+a^2x^2+1}$ không phụ thuộc vào giá trị của x.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $P=\dfrac{\left(x^2+a\right)\left(1+a\right)+a^2x^2+1}{\left(x^2-a\right)\left(1-a\right)+a^2x^2+1}=\dfrac{x^2+ax^2+a+a^2+a^2x^2+1}{x^2-ax^2-a+a^2+a^2x^2+1}$

$$=\frac{\left(1+x^2\right)+\left(1+x^2\right)a+\left(1+x^2\right)a^2}{\left(1+x^2\right)-\left(1+x^2\right)a+\left(1+x^2\right)a^2}=\frac{\left(1+x^2\right)\left(1+a+a^2\right)}{\left(1+x^2\right)\left(1-a+a^2\right)}=\frac{1+a+a^2}{1-a+a^2}$$

Vậy giá trị biểu thức P không phụ thuộc vào giá trị của x.

10.12. Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{x^3-x}{\left(1+xy\right)^2-\left(x+y\right)^2}$, với $x=-499; y=999.$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $P=\dfrac{x\left(x^2-1\right)}{\left(1+xy+x+y\right)\left(1+xy-x-y\right)}$

$$P=\frac{x\left(x-1\right)\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)\left(y+1\right)\left(x-1\right)\left(y-1\right)}=\frac{x}{\left(y+1\right)\left(y-1\right)}$$

Điều kiện $x\neq\pm1; y\neq\pm1.$

Với $x=-499, y=999$ thay vào ta được

$$P=\frac{-499}{\left(999+1\right)\left(999-1\right)}=\frac{-499}{1000.998}=\frac{-1}{2000}$$

10.13. Tính giá trị biểu thức: $A=\dfrac{x\left(x+5\right)+y\left(y+5\right)+2\left(xy-3\right)}{x\left(x+6\right)+y\left(y+6\right)+2xy}$ với $x+y=2020.$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $A=\dfrac{x\left(x+5\right)+y\left(y+5\right)+2\left(xy-3\right)}{x\left(x+6\right)+y\left(y+6\right)+2xy}=\dfrac{x^2+5x+y^2+5y+2xy-6}{x^2+6x+y^2+6y+2xy}$

$$=\frac{(x+y)^2+5(x+y)-6}{(x+y)^2+6(x+y)}=\frac{(x+y+6)(x+y-1)}{(x+y+6)(x+y)}=\frac{x+y-1}{x+y}$$

$$=\frac{(x+y)^2+5(x+y)-6}{(x+y)^2+6(x+y)}=\frac{(x+y+6)(x+y-1)}{(x+y+6)(x+y)}=\frac{x+y-1}{x+y}$$

Điều kiện $x \neq -y; x+y \neq -6$.

Với $x+y=2020$ thì giá trị biểu thức $A=\frac{2019}{2020}$

10.14. Cho $ax+by+cz=0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ax^2+by^2+cz^2}{bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2}=\frac{1}{a+b+c}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Xét $bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2$

$=bcy^2-2bcyz+bcz^2+caz^2-2cazx+cax^2+abx^2-2abxy+aby^2$

$=\left(a^2x^2+aby^2+acz^2\right)+\left(abx^2+b^2y^2+bcz^2\right)+\left(acx^2+bcy^2+c^2z^2\right)-$

$\left(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2bcyz+2cazx\right)$

$=(a+b+c)\left(ax^2+by^2+cz^2\right)-(ax+by+cz)^2$

$=(a+b+c)\left(ax^2+by^2+cz^2\right)$ (vì $ax+by+cz=0$)

Từ đó suy ra, vế trái

$$\frac{ax^2+by^2+cz^2}{bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2}=\frac{ax^2+by^2+cz^2}{(a+b+c)\left(ax^2+by^2+cz^2\right)}=\frac{1}{a+b+c}.$$

Chương II

PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Chuyên đề 11. PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Cộng hai phân thức cùng mẫu thức

Quy tắc. Muốn cộng hai phân thức cùng mẫu thức, ta cộng các tử thức với nhau và giữ nguyên mẫu thức.

2. Cộng hai phân thức có mẫu số khác nhau

- *Quy tắc.* Muốn cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau, ta quy đồng mẫu thức rồi cộng các phân thức có cùng mẫu thức vừa tìm được.
- *Chú ý.* Phép cộng các phân thức có các tính chất sau:

+ Giao hoán: $\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{C}{D}+\frac{A}{B}$;

+ Kết hợp: $\left(\frac{A}{B}+\frac{C}{D}\right)+\frac{E}{F}=\frac{A}{B}+\left(\frac{C}{D}+\frac{E}{F}\right)$.

1. Phân thức đối

- Hai phân thức được gọi là đối nhau nếu tổng của chúng bằng 0.
- Phân thức đối của phân thức $\frac{A}{B}$ được kí hiệu bởi $-\frac{A}{B}$

Như vậy $-\frac{A}{B}=\frac{-A}{B}$ và $-\frac{-A}{B}=\frac{A}{B}$.

2. Phép trừ

Quy tắc: Muốn trừ phân thức $\frac{A}{B}$ cho phân thức $\frac{C}{D}$, ta cộng $\frac{A}{B}$ với phân thức đối của $\frac{C}{D}$:

$\frac{A}{B}-\frac{C}{D}=\frac{A}{B}+\left(-\frac{C}{D}\right)$.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Thực hiện phép tính:

a) $A=\frac{x^4-(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2-x^2}+\frac{x^2-\left(x^2-1\right)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\frac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}$

Giải

Tìm cách giải. Quan sát kĩ các phân thức, nhận thức tử thức của mỗi phân thức đều phân tích đa thức thành nhân tử được, do vậy ta nên phân tích thành nhân tử cả tử thức và mẫu thức và rút gọn phân thức trước khi thực hiện phép cộng.

Trình bày lời giải.

Ta có:

$$A=\frac{\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x-1\right)}{\left(x^2+1-x\right)\left(x^2+1+x\right)}+\frac{\left(x+x^2-1\right)\left(x-x^2+1\right)}{\left(x^2+x-1\right)\left(x^2+x+1\right)}+\frac{\left(x^2-x-1\right)\left(x^2-x+1\right)}{\left(x^2-x-1\right)\left(x^2+x+1\right)}$$

$$\Rightarrow A=\frac{x^2+x-1}{x^2+x+1}=\frac{x-x^2+1}{x^2+x+1}+\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$$

$$\Rightarrow A=\frac{x^2+x+1}{x^2+x+1}=1.$$

Nhận xét. Trong khi thực hiện phép cộng, trừ các phân thức đại số, nếu phân thức nào rút gọn được, bạn nên rút gọn trước khi thực hiện.

Ví dụ 2. Cho a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Tính giá trị

$$M=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ac+c+1}$$

Giải

Thay $1=abc$ vào biểu thức, ta có:

$$M=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{abc.b}{bc+abc.b+abc}+\frac{c}{ac+c+abc}$$

$$\Rightarrow M=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{1+ab+a}+\frac{1}{a+1+ab}$$

$$M=\frac{ab+a+1}{ab+a+1}=1.$$

Nhận xét.

- Lời giải trên tinh tế khi giữ nguyên một phân thức và thay số 1 vào vị trí hợp lí để rút gọn phân thức, đưa các phân thức về cùng mẫu.
- Sử dụng kĩ thuật trên bạn có thể giải được bài toán sau: Cho a, b, c, d thỏa mãn $abcd=1$. Tính giá trị của biểu thức:

$$N=\frac{1}{1+2a+3ab+4abc}+\frac{2}{2+3b+4bc+bcd}+\frac{3}{3+4c+cd+2cda}+\frac{4}{4+d+2da+3dab}.$$

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức: $B=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}+\frac{2a}{a^2+b^2}+\frac{4a^3}{a^4+b^4}+\frac{8a^7}{a^8+b^8}.$

Giải

Tìm cách giải. Quan sát các phân thức, chúng ta nhận thấy không có mẫu của hạng tử nào phân tích được thành nhân tử nên việc quy đồng mẫu thức tất cả các hạng tử là không khả thi. Nhận thấy mẫu của hai phân thức đầu có dạng a – b và a + b, thực hiện trước tổng của hai phân thức này cho ta kết quả gọn.Với suy luận ấy, chúng ta tiếp tục cộng kết quả ấy với phân thức tiếp theo.

Trình bày lời giải

Ta có: $B=\dfrac{2a}{a^2-b^2}+\dfrac{2a}{a^2+b^2}+\dfrac{4a^3}{a^4+b^4}+\dfrac{8a^7}{a^8+b^8}$

$\Rightarrow B=\dfrac{4a^3}{a^4-b^4}+\dfrac{4a^3}{a^4+b^4}+\dfrac{8a^7}{a^8+b^8}\Rightarrow B=\dfrac{8a^7}{a^8-b^8}+\dfrac{8a^7}{a^8+b^8}\Rightarrow B=\dfrac{16a^{15}}{a^{16}-b^{16}}$

Ví dụ 4. Cho $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$. Rút gọn biểu thức:

$$P=\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ac}+\frac{c^2}{c^2+2ab}.$$

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy nếu quy đồng mẫu trực tiếp là không khả thi bởi các mẫu hiện tại không phân tích thành nhân tử được và nếu quy đồng thì biểu thức rất phức tạp, mặt khác chưa khai thác được giả thiết. Phân tích giả thiết ta được $ab+bc+ca=0$, khai thác yếu tố này vào mẫu thức ta được:

$a^2+2bc=a^2+2bc-ab-bc-ca$ và phân tích thành nhân tử được. Do vậy ta có lời giải sau:

Trình bày lời giải

Từ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$. ta có: $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=a^2+b^2+c^2$ nên $ab+bc+ca=0$

Xét $a^2+2bc=a^2+2bc-ab-bc-ca=a^2-ab-ca+bc=(a-b)(a-c)$.

Tương tự ta có: $b^2+2ac=(b-a)(b-c);c^2+2ab=(c-a)(c-b)$.

Do đó ta có: $P=\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

$$\Rightarrow P=-\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

Phân tích tử thức thành nhân tử, ta có: $P=-\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1$.

Ví dụ 5. Tìm A, B thỏa mãn: $\dfrac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2}=\dfrac{A}{(x-1)^2}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}$

Giải

Tìm cách giải. Để tìm hệ số A và B, chúng ta biến đổi vế phải. Sau đó đồng nhất hệ số hai vế.

Trình bày lời giải

Ta có: $x^3-3x+2=x^3-2x-x+2=x(x+1)(x-1)-2(x-1)$

$$=(x-1)(x^2+x-2)$$
$$=(x-1)^2(x+2)$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{3x^2+3x+3}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{1}{x+2}$$

$$=\frac{A(x+2)+B(x-1)(x+2)+(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$\Rightarrow 3x^2+3x+3=(B+1)x^2+(A+B-2)x+(2A-2B+1)$$

Đồng nhất hệ số ta có: $\begin{cases} B+1+3 \\ A+B-2=3 \\ 2A-2B+1=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=2 \end{cases}$

Ví dụ 6. Thực hiện phép tính:

$$A=\frac{x^2-yz}{(x+y)(x+z)}+\frac{y^2-xz}{(y+z)(y+x)}+\frac{z^2-xy}{(x+z)(y+z)}$$

Giải

Tìm cách giải. Suy nghĩ trước bài này, ta có hai hướng phân tích:

Hướng thứ nhất. Quy đồng mẫu, thực hiện phép cộng như thường lệ.

Hướng thứ hai. Tách mỗi phân thức thành hiệu của hai phan thức, rồi khử liên tiếp. Trong bài này, cách này không ngắn, song thể hiện được nét đẹp và sáng tạo.

Trình bày lời giải

Cách 1. Ta có: $A=\frac{x^2-yz}{(x+y)(x+z)}+\frac{y^2-xz}{(y+z)(y+x)}+\frac{z^2-xy}{(x+z)(y+z)}$

$$A=\frac{(x^2-yz)(y+z)+(y^2-xz)(x+z)+(z^2-xy)(x+y)}{(x+y)(x+z)(y+z)}$$

$$A=\frac{x^2y+x^2z-y^2z-yz^2+xy^2+y^2z-x^2z+xz^2+yz^2-x^2y-xy^2}{(x+y)(x+z)(y+z)}=0$$

Cách 2. Ta có:

$$\frac{x^2-yz}{(x+y)(x+z)}=\frac{x^2+xy-xy-yz}{(x+y)(x+z)}=\frac{x(x+y)-y(x+z)}{(x+y)(x+z)}=\frac{x}{x+z}-\frac{y}{x+y}\ (1)$$

Tương tự

$$\frac{y^2-xz}{(y+z)(y+x)}=\frac{y}{x+y}-\frac{z}{y+z}\ (2)$$

$$\frac{z^2-xy}{(z+x)(z+y)}=\frac{z}{y+z}-\frac{x}{x+z}\ (3)$$

Từ (1), (2) và (3) cộng vế với vế ta được $A=0$.

Ví dụ 7. Cho $a_1, a_2 \ldots a_9$ được xác định bởi công thức: $a_k = \dfrac{3k^2+3k+1}{\left(k^2+k\right)^3}$ với mọi $k \geq 1$

Hãy tính giá trị của tổng: $1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_9$.

(Tuyển sinh lớp 10, Trường THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, năm học 1999 – 2000)

Giải

Tìm cách giải. Bài toán có tính quy luật, thay số vào tính là không khả thi. Do vậy chúng ta nghĩ đến việc tách mỗi phân thức thành hiệu của hai phân thức, rồi khử liên tiếp. Nhận thấy $3k^2+3k+1 = (k+1)^3 - k^3$, nên chúng ta có lời giải sau:

Trình bày lời giải

Ta có: $a_k = \dfrac{3k^2+3k+1}{\left(k^2+k\right)^3} = \dfrac{(k+1)^3 - k^3}{k^3(k+1)^3} = \dfrac{1}{k^3} - \dfrac{1}{(k+1)^3}$

Do đó:

$$S = 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_9$$
$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2^3}\right) + \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{9^3} - \frac{1}{10^3}\right) = 2 - \frac{1}{10^3} = \frac{1999}{1000}.$$

Ví dụ 8. Rút gọn biểu thức:

$$M = \frac{1}{x^2-5x+6} + \frac{1}{x^2-7x+12} + \frac{1}{x^2-9x+20} + \frac{1}{x^2-11x+30}$$

Giải

Ta có: $M = \dfrac{1}{x^2-5x+6} + \dfrac{1}{x^2-7x+12} + \dfrac{1}{x^2-9x+20} + \dfrac{1}{x^2-11x+30}$

$$= \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-4)} + \frac{1}{(x-4)(x-5)} + \frac{1}{(x-5)(x-6)}$$
$$= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-6}$$
$$= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-6} = \frac{-4}{(x-2)(x-6)}.$$

C. Bài tập vận dụng

11.1. Xác định các số a, b biết: $\dfrac{3x+1}{(x+1)^3} = \dfrac{a}{(x+1)^3} + \dfrac{b}{(x+1)^2}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có:

$$\frac{3x+1}{(x+1)^3} = \frac{a}{(x+1)^3} + \frac{b}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \frac{3x+1}{(x+1)^3} = \frac{a}{(x+1)^3} + \frac{bx+b}{(x+1)^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+1}{(x+1)^3} = \frac{bx+a+b}{(x+1)^3} \Leftrightarrow 3x+1 = bx+a+b \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ a=-2 \end{cases}$$

11.2. Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{20x^2+120x+180}{(3x+5)^2-4x^2} + \frac{5x^2-125}{9x^2-(2x+5)^2} - \frac{(2x+3)^2-x^2}{3(x^2+8x+15)}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có:

$$A = \frac{20(x+3)^2}{(x+5).5(x+1)} + \frac{5(x-5)(x+5)}{5(x+1)(x-5)} - \frac{(x+3).3.(x+1)}{3(x+3)(x+5)}$$

$$= \frac{4(x+3)^2}{(x+5)(x+1)} + \frac{x+5}{x+1} - \frac{x+1}{x+5} = \frac{4(x+3)^2+(x+5)^2-(x+1)^2}{(x+1)(x+5)}$$

$$= \frac{4x^2+24x+36+x^2+10x+25-x^2-2x-1}{(x+1)(x+5)}$$

$$= \frac{4x^2+32x+60}{(x+5)(x+1)} = \frac{4(x+3)(x+5)}{(x+5)(x+1)} = \frac{4(x+3)}{x+1}$$

11.3. Cho $P = \frac{a^4-a}{a^2+a+1} - \frac{3a^2-2a}{a} + \frac{a^2-4}{a-2}$.

a) Rút gọn biểu thức P;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có: $P = \frac{a^4-a}{a^2+a+1} - \frac{3a^2-2a}{a} + \frac{a^2-4}{a-2}$

$$= \frac{a(a-1)(a^2+a+1)}{(a^2+a+1)} - 3a + 2 + \frac{(a-2)(a+2)}{a-2}$$

$$= a^2-a-3a+2+a+2 = a^2-3a+4.$$

Điều kiện $a \neq 2$.

b) $P = a^2-3a+2,25+1,75 = 1,75+(a-1,5)^2 \geq 1,75$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ a $=1,5$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1,25 đạt được khi a $=1,5$.

11.4. Cho biểu thức: $Q = \frac{x^4+x}{x^2-x+1} + 1 - \frac{2x^2+3x+1}{x+1}$.

a) Rút gọn biểu thức Q;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của Q.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có: $Q=\dfrac{x^4+x}{x^2-x+1}+1-\dfrac{2x^2+3x+1}{x+1}$ (ĐK: $x\neq -1$)

$$=\frac{x(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}+1-\frac{(2x+1)(x+1)}{x+1}$$

$$=x^2+x+1-2x=x^2-x.$$

b) $Q=x^2-x+0,25-0,25=(x-0,5)^2-0,25\geq -0,25.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là -0,25 đạt được $\Leftrightarrow$ x = 0,5.

11.5. Thực hiện phép tính: $M=\dfrac{a^2+1}{a}+\dfrac{a^3-1}{a^2-a}+\dfrac{a^4-a^3+a-1}{a-a^3}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có:

$$M=\frac{a^2+1}{a}+\frac{a^3-1}{a^2-a}+\frac{a^4-a^3+a-1}{a-a^3}$$

$$=\frac{a^2+1}{a}+\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a(a-1)}-\frac{a^4-a^3+a-1}{a(a^2-1)}$$

$$=\frac{a^2+1}{a}+\frac{a^2+a+1}{a}-\frac{(a^2-1)(a^2+1)-a(a^2-1)}{a(a^2-1)}$$

$$=\frac{a^2+1+a^2+a+1}{a}-\frac{a^2+1-a}{a}=\frac{a^2+2a+1}{a}$$

11.6. Đặt $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=a$

Tính giá trị của biểu thức: $M=\dfrac{x^8+y^8}{x^8-y^8}+\dfrac{x^8-y^8}{x^8+y^8}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ giả thiết $\Rightarrow a=\dfrac{(x^2+y^2)^2+(x^2-y^2)^2}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}$

$$\Rightarrow a=\frac{2(x^4+y^4)}{x^4-y^4}\Rightarrow \frac{x^4+y^4}{x^4-y^4}=\frac{a}{2}$$

Ta có: $\dfrac{a}{2}+\dfrac{2}{a}=\dfrac{x^4+y^4}{x^4-y^4}+\dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4}=\dfrac{(x^4+y^4)^2+(x^4-y^4)^2}{(x^4-y^4)(x^4+y^4)}$

$$\Rightarrow \frac{a}{2}+\frac{2}{a}=\frac{2\left(x^8+y^8\right)}{x^8-y^8}\Rightarrow \frac{x^8+y^8}{x^8-y^8}=\frac{a}{4}+\frac{1}{a}=\frac{a^2+4}{4a}$$

$$\Rightarrow M=\frac{a^2+4}{4a}+\frac{4a}{a^2+4}=\frac{a^4+24a^2+16}{4a\left(a^2+4\right)}$$

11.7. Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức sau nhận giá trị nguyên

$$A=\frac{2x^3+x^2+2x+5}{2x+1}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $A=\dfrac{\left(x^2+1\right)\left(2x+1\right)+4}{2x+1}=x^2+1+\dfrac{4}{2x+1}$

Để $A\in Z$ thì $\dfrac{4}{2x+1}\in Z\Leftrightarrow 2x+1\in\left\{\pm1\right\}\Leftrightarrow x\in\left\{0;-1\right\}$.

11.8. Cho $x+y=1$ và $xy\neq 0$. Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{x}{y^3-1}-\dfrac{y}{x^3-1}+\dfrac{2\left(x-y\right)}{x^2y^2+3}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Biến đổi $\dfrac{x}{y^3-1}-\dfrac{y}{x^3-1}+\dfrac{2\left(x-y\right)}{x^2y^2+3}=\dfrac{x^4-x-y^4+y}{\left(y^3-1\right)\left(x^3-1\right)}+\dfrac{2\left(x-y\right)}{x^2y^2+3}$

$=\dfrac{\left(x^4-y^4\right)-\left(x-y\right)}{xy\left(y^2+y+1\right)\left(x^2+x+1\right)}+\dfrac{2\left(x-y\right)}{x^2y^2+3}$ (do $x+y=1\Rightarrow y-1=-x$ và $x-1=-y$)

$$=\frac{\left(x-y\right)\left(x+y\right)\left(x^2+y^2\right)-\left(x-y\right)}{xy\left(x^2y^2+y^2x+y^2+yx^2+xy+y+x^2+x+1\right)}+\frac{2\left(x-y\right)}{x^2y^2+3}$$

$$=\frac{\left(x-y\right)\left(x^2+y^2-1\right)}{xy\left[x^2y^2+xy\left(x+y\right)+x^2+y^2+xy+2\right]}+\frac{2\left(x-y\right)}{x^2y^2+3}$$

$$=\frac{\left(x-y\right)\left(x^2-x+y^2-y\right)}{xy\left[x^2y^2+\left(x+y\right)^2+2\right]}+\frac{2\left(x-y\right)}{x^2y^2+3}=\frac{\left(x-y\right)\left[x\left(x-1\right)+y\left(y-1\right)\right]}{xy\left(x^2y^2+3\right)}+\frac{2\left(x-y\right)}{x^2y^2+3}$$

$$=\frac{\left(x-y\right)\left[x\left(-y\right)+y\left(-x\right)\right]}{xy\left[x^2y^2+3\right]}+\frac{2\left(x-y\right)}{x^2y^2+3}=\frac{\left(x-y\right)\left(-2xy\right)}{xy\left(x^2y^2+3\right)}+\frac{2\left(x-y\right)}{x^2y^2+3}$$

$$=\frac{-2\left(x-y\right)}{x^2y^2+3}+\frac{2\left(x-y\right)}{x^2y^2+3}=0.$$

11.9. Cho 3 số thực x, y, z thỏa mãn $x+y+z=0$ và $xyz\neq 0$.

Tính $P=\dfrac{x^2}{y^2+z^2-x^2}+\dfrac{y^2}{z^2+x^2-y^2}+\dfrac{z^2}{x^2+y^2-z^2}$.

(Tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên TP. Hồ Chí Minh, năm học 2014 – 2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ $x+y+z=0 \Rightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz.$

Từ giả thiết, ta có $y+z=-x \Leftrightarrow y^2+z^2-x^2=-2xy.$

Làm tương tự, thay vào P, ta được:

$$P=\frac{x^2}{-2yz}+\frac{y^2}{-2xz}+\frac{z^2}{-2xy}=\frac{x^3+y^3+z^3}{-2xyz}=\frac{3xyz}{-2xyz}=\frac{-3}{2}$$

$$P=\frac{-3}{2}$$

11.10. Cho ba số thực x, y, z đôi một khác nhau thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$

Tính giá trị biểu thức $A=\frac{yz}{x^2+2yz}+\frac{zx}{y^2+2zx}+\frac{xy}{z^2+2xy}$

(Tuyển sinh lớp 10, Trường THPT chuyên TP Hồ Chí Minh, năm học 2013 – 2014)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \Leftrightarrow xy+yz+zx=0 \Leftrightarrow yz=-xy-zx.$

$$\frac{yz}{x^2+2yz}=\frac{yz}{x^2-xy-zx+yz}=\frac{yz}{(x-y)(x-z)}$$

Tương tự: $\frac{zx}{y^2+2zx}=\frac{zx}{(y-z)(y-x)};\frac{xy}{z^2+2xy}=\frac{xy}{(z-x)(z-y)}$

$$A=\frac{yz}{(x-y)(x-z)}+\frac{zx}{(y-z)(y-x)}+\frac{xy}{(z-x)(z-y)}$$

$$\frac{yz(z-y)+xy(y-x)+zx(x-z)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=1$$

11.11. Cho $ax+by=c;by+cz=a;cz+ax=b$ và $a+b+c\neq 0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ giả thiết suy ra:

$$a+b+c=2(ax+by+cz) \Rightarrow a+b+c=2(c+cz)=2c(1+z)$$

Nên: $\frac{1}{z+1}=\frac{2c}{a+b+c}$

Tương tự: $\frac{1}{x+1}=\frac{2a}{a+b+c};\frac{1}{y+z}=\frac{2b}{a+b+c}.$

Suy ra: $P=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=\frac{2a+2b+2c}{a+b+c}=2$

11.12. Cho a, b thỏa mãn $4a^2+2b^2-7ab=0$ và $4a^2-b^2\neq 0$

Tính giá trị của biểu thức: $A=\frac{3a-b}{2a-b}+\frac{5b-3a}{2a+b}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $\frac{6a^2+ab-b^2+10ab-6a^2+3ab}{4a^2-b^2}=\frac{14ab-6b^2}{7ab-3b^2}=2$

11.13. Tính giá trị của biểu thức: $A=\frac{3^3+1^3}{2^3-1^3}+\frac{5^3+2^3}{3^3-2^3}+\frac{7^3+3^3}{4^3-3^3}+...+\frac{101^3+50^3}{51^3-50^3}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Xét phân thức tổng quát:

$$\frac{(2n+1)^3+n^3}{(n+1)^3-n^3}=\frac{(3n+1)\left[(2n+1)^2-n(2n+1)+n^2\right]}{3n^2+3n+1}$$

$$=\frac{(3n+1)(3n^2+3n+1)}{3n^2+3n+1}=3n+1$$

Do đó: $A=(3.1+1)+(3.2+1)+(3.3+1)+...+(3.5+1)$

$$=3(1+2+3+...+50)+50=3875.$$

11.14. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x^2+y^2+z^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=6.$

Tính $P=x^{2020}+y^{2020}+z^{2020}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ giả thiết chuyển vế, ta có:

$$x^2-2+\frac{1}{x^2}+y^2-2+\frac{1}{y^2}+z^2-2+\frac{1}{z^2}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(y-\frac{1}{y}\right)^2+\left(z-\frac{1}{z}\right)^2=0\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{x}\\ y=\frac{1}{y}\\ z=\frac{1}{z}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=1\\ y^2=1\\ z^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^{2020}=1\\ y^{2020}=1\\ z^{2020}=1\end{cases}$$

$\Rightarrow P=1+1+1=3.$

11.15. Rút gọn biểu thức: $B=\frac{3}{(1.2)^2}+\frac{5}{(2.3)^2}+...+\frac{2n+1}{\left[n(n+1)\right]^2}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta tách từng phân thức thành hiệu của hai phân thức rồi dùng phương pháp khử liên tiếp, ta được:

$$\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\frac{(k+1)^2-k^2}{k^2(k+1)^2}=\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}$$

Do đó $B=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+10^2)}$

11.16. Cho biểu thức $A=\frac{2x-1}{3x-1}+\frac{5-x}{3x+1}$ (với $x\neq\pm\frac{1}{3}$)

Tính giá trị biểu thức A biết rằng $10x^2+5x=3$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $A=\frac{(2x-1)(3x+1)+(5-x)(3x-1)}{(3x-1)(3x+1)}$

$$=\frac{6x^2+2x-3x-1+15x-5-3x^2+x}{9x^2-1}$$

$$=\frac{3x^2+15x-6}{9x^2-1}=\frac{3(x^2-5x-2)}{9x^2-1}(1)$$

Từ điều kiện $10x^2+5x+3\Rightarrow 5x=3-10x^2$ thay vào (1) ta có:

$$A=\frac{3(x^2+3-10x^2-2)}{9x^2-1}=\frac{3(1-9x^2)}{9x^2-1}=-3$$

11.17. Rút gọn biểu thức: $A=\frac{2x+3y}{xy+2x-3y-6}-\frac{6-xy}{xy+2x+3y+6}-\frac{x^2+9}{x^2-9}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $A=\frac{2x+3y}{x(y+2)-3(y+2)}-\frac{6-xy}{x(y+2)+3(y+2)}-\frac{x^2+9}{(x-3)(x+3)}$

$$=\frac{2x+3y}{(y+2)(x-3)}-\frac{6-xy}{(y+2)(x+3)}-\frac{x^2+9}{(x-3)(x+3)}$$

$$=\frac{(2x+3y)(x+3)-(6-xy)(x-3)-(x^2+9)(y+2)}{(x-3)(x+3)(y+2)}$$

$$=\frac{2x^2+6x+3xy+9y-6x+18+x^2y-3xy-x^2y-2x^2-2y-18}{(x-3)(x+3)(y+2)}$$

$$=\frac{0}{(x-3)(x+3)(y+2)}=0$$

11.18. Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau, tính.

$$S=\frac{ab}{(b-c)(c-a)}+\frac{bc}{(c-a)(a-b)}+\frac{ac}{(a-b)(b-c)}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $S = \dfrac{ab}{(b-c)(c-a)} + \dfrac{bc}{(c-a)(a-b)} + \dfrac{ac}{(a-b)(b-c)}$

$$= \frac{ab(a-b)+bc(b-c)+ac(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

Xét tử thức, ta có:

$ab(a-b)+bc(b-c)+ac(c-a)$

$= ab(a-b)+b^2c-bc^2+ac^2-a^2c$

$= ab(a-b)-c(a+b)(a-b)+c^2(a-b)$

$= (a-b)(ab-ac-bc+c^2)$

$= (a-b)(b-c)(a-c) = -(a-b)(b-c)(c-a)$

Vậy $S = \dfrac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = -1.$

11.19. Rút gọn

a) $A = \dfrac{1}{x^2+9x+20} + \dfrac{1}{x^2+11x+30} + \dfrac{1}{x^2+13x+42} + \dfrac{1}{x^2+15x+56}$;

b) $B = \dfrac{2}{x^2+4x+3} + \dfrac{4}{x^2+10x+21} + \dfrac{3}{x^2+17x+70.}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có $A = \dfrac{1}{(x+4)(x+5)} + \dfrac{1}{(x+5)(x+6)} + \dfrac{1}{(x+6)(x+7)} + \dfrac{1}{(x+7)(x+8)}$

$$= \frac{1}{(x+4)} - \frac{1}{(x+5)} + \frac{1}{(x+5)} - \frac{1}{(x+6)} + \frac{1}{(x+6)} - \frac{1}{(x+7)} + \frac{1}{(x+7)} - \frac{1}{(x+8)}$$

$$= \frac{1}{(x+4)} - \frac{1}{(x+5)} = \frac{4}{(x+4)(x+8)}$$

b) Ta có $B = \dfrac{2}{(x+1)(x+3)} + \dfrac{4}{(x+3)(x+7)} + \dfrac{3}{(x+7)(x+10)}$

$$B = \frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{(x+3)} + \frac{1}{(x+3)} - \frac{1}{(x+7)} + \frac{1}{(x+7)} - \frac{1}{(x+10)}$$

$$B = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+10} = \frac{9}{(x+1)(x+10)}.$$

Chuyên đề 12. PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A. Kiến thức cần nhớ

Quy tắc: Muốn nhân hai phân thức, ta nhân các tử thức với nhau, các mẫu thức với nhau: $\frac{A}{B}.\frac{C}{D}=\frac{A.C}{B.D}$

Phép nhân các phân thức có các tính chất:

- Giao hoán: $\frac{A}{B}.\frac{C}{D}=\frac{C}{D}.\frac{A}{B}$;
- Kết hợp: $\left(\frac{A}{B}.\frac{C}{D}\right).\frac{E}{F}=\frac{A}{B}.\left(\frac{C}{D}.\frac{E}{F}\right)$;
- Phân phối đối với phép cộng: $\frac{A}{B}\left(\frac{C}{D}+\frac{E}{F}\right)=\frac{A}{B}.\frac{C}{D}+\frac{A}{B}.\frac{E}{F}$.

1. Phân thức nghịch đảo. Hai phân thức được gọi là nghịch đảo của nhau nếu tích của chúng bằng 1.

Tổng quát, nếu $\frac{A}{B}$ là phân thức khác 0 thì $\frac{A}{B}.\frac{B}{A}=1$, do đó $\frac{A}{B}$ là phân thức nghịch đảo của phân thức $\frac{B}{A}$.

2. Phép chia

Q*uy tắc.* Muốn chia phân thức $\frac{A}{B}$ cho phân thức $\frac{C}{D}$ khác 0, ta nhân $\frac{A}{B}$ với phân thức nghịch đảo của $\frac{C}{D}$.

$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}.\frac{D}{C}$ với $\frac{C}{D}\neq 0$.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Thực hiện các phép tính sau:

a) $P=\frac{12x+5}{x+9}.\frac{4x+3}{360x+150}+\frac{12x+5}{x+9}.\frac{6-3x}{360x+150}$

b) $P=\frac{x+3y}{3x+y}.\frac{4x-2y}{x-y}-\frac{x+3y}{3x+y}.\frac{x-3y}{x-y}$

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy trong các biểu thức đều có phân thức chung. Do đó nên vận dụng tính chất phân phối của phép nhân nhằm đưa bài toán về dạng đơn giản hơn.

Trình bày lời giải

a) Dùng tính chất phân phối, ta có:

$$P=\frac{12x+5}{x+9}.\left(\frac{4x+3}{360x+150}+\frac{6-3x}{360x+150}\right)=\frac{12x+5}{x+9}.\frac{x+9}{30(12x+5)}=\frac{1}{30}$$

b) Dùng tính chất phân phối, ta có:

$$P=\frac{x+3y}{3x+y}.\left(\frac{4x-2y}{x-y}-\frac{x-3y}{x-y}\right)=\frac{x+3y}{3x+y}.\frac{3x+y}{x-y}=\frac{x+3y}{x-y}$$

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức:

$$R=\frac{3a^2-2ab-b^2}{2a^2+ab-b^2}:\frac{3a^2-4ab+b^2}{3a^2+2ab-b^2}$$

(Tuyển sinh 10, Trường PTNK, ĐHQGTP.Hồ Chí Minh, năm học 2004 - 2005)

Giải

$$R=\frac{(a-b)(3a+b)}{(2a-b)(a+b)}:\frac{(a-b)(3a-b)}{(3a-b)(a+b)}=\frac{(a-b)(3a+b)}{(2a-b)(a+b)}.\frac{(3a-b)(a+b)}{(a-b)(3a-b)}$$

$$R=\frac{3a+b}{2a-b}$$

Ví dụ 3: Cho $x+y+z=1$. Chứng minh rằng giá trị biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến số:

$$P=\frac{(x+y)^2}{xy+z}.\frac{(y+z)^2}{yz+x}.\frac{(z+x)^2}{zx+y}$$

Giải

Tìm cách giải. Khai thác điều kiện bài toán, nhận thấy với điều kiện này chúng ta có thể cân bằng bậc ở mẫu và phân tích thành nhân tử được $xy+z=xy+z(x+y+z)=(z+x)(z+y)$. Do vậy chúng ta có lời giải sau:

Trình bày lời giải

Thay $1=x+y+z$ vào mẫu số, ta được:

$$xy+z=xy+z(x+y+z)=(z+x)(z+y)$$

và tương tự ta có:

$$yz+x=(x+y)(x+z)$$

$$zx+y=(x+y)(y+z)$$

Từ đó suy ra: $P=\frac{(x+y)^2}{(x+z)(y+z)}.\frac{(y+z)^2}{(x+y)(x+z)}.\frac{(z+x)^2}{(x+y)(y+z)}$

$\Rightarrow P=1$

Ví dụ 4: Cho $a+b+c=0$. Chứng minh rằng tích sau không phụ thuộc vào biến số:

a) $M=\frac{4bc-a^2}{bc+2a^2}\frac{4ca-b^2}{ca+2b^2}\frac{4ab-c^2}{ab+2c^2}$

b) $N=\left(1+\frac{a}{b}\right).\left(1+\frac{b}{c}\right).\left(1+\frac{c}{a}\right)$

Giải

a) Ta có:

$$\frac{4bc-a^2}{bc+2a^2}=\frac{4bc-(b+c)^2}{bc+a^2-a(b+c)}=\frac{-(b^2-2bc+c^2)}{bc+a^2-ab-ac}=\frac{-(b-c)^2}{(a-b)(a-c)}\quad(1)$$

Tương tự ta có: $\dfrac{4ca-b^2}{ca+2b^2}=\dfrac{-(c-a)^2}{(b-a)(b-c)}$ (2)

$\dfrac{4ab-c^2}{ab+2c^2}=\dfrac{-(a-b)^2}{(c-a)(c-b)}$ (3)

Từ (1) và (2), (3) ta có:

$$M=\frac{4bc-a^2}{bc+2a^2}\frac{4ca-b^2}{ca+2b^2}\frac{4ab-c^2}{ab+2c^2}=\frac{-(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{-(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}=1$$

Vậy giá trị biểu thức M không phụ thuộc vào giá trị của biến.

b) Ta có:

$$N=\left(1+\frac{a}{b}\right).\left(1+\frac{b}{c}\right).\left(1+\frac{c}{a}\right)=\frac{a+b}{b}.\frac{c+b}{c}.\frac{a+c}{a}=\frac{(-c)(-a)(-b)}{abc}=-1$$

Vậy giá trị biểu thức N không phụ thuộc vào giá trị của biến.

Ví dụ 5: Cho *x* là số thực âm thỏa mãn $x^2+\dfrac{1}{x^2}=23$. Tính giá trị biểu thức $A=x^3+\dfrac{1}{x^3}$

Giải

Tìm cách giải. Do kết luận có dạng hằng đẳng thức a^3+b^3, nên để tính giá trị biểu thức, chúng ta cần tính được $x+\dfrac{1}{x}$. Với suy nghĩ ấy, chúng ta khai thác điều kiện để tìm $x+\dfrac{1}{x}$. Từ đó chúng ta có lời giải sau:

Trình bày lời giải

Từ giả thiết $x^2+\dfrac{1}{x^2}=23\Rightarrow x^2+2+\dfrac{1}{x^2}=23\Rightarrow\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=25$

Vì $x<0$ nên $x+\dfrac{1}{x}=-5$

Ta có: $A=x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=(-5)^3-3.(-5)=-110$.

Ví dụ 6: Rút gọn biểu thức với *n* là số nguyên dương:

$$A=\left(1+\frac{2}{1.4}\right)\left(1+\frac{2}{2.5}\right)\left(1+\frac{2}{3.6}\right)...\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$$

Giải

Tìm cách giải. Với phép nhân các biểu thức theo quy luật, chúng ta thường xét phân thức có dạng tổng quát. Sau đó phân tích thành nhân tử cả tử và mẫu dạng tổng quát ấy. Cuối cùng thay các giá trị từ 1 đến *n* vào biểu thức và rút gọn.

Trình bày lời giải

Xét $1+\frac{2}{k\left(k+3\right)}=\frac{k^2+3k+2}{k\left(k+3\right)}=\frac{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}{k\left(k+3\right)}$

Thay $k=1;\ 2;\ 3;...;$n ta được:

$$A=\frac{2.3}{1.4}.\frac{3.4}{2.5}.\frac{4.5}{3.6}...\frac{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{n\left(n+3\right)}=\frac{2.3.4...\left(n+1\right)}{1.2.3...n}.\frac{3.4.5...\left(n+2\right)}{4.5.6...\left(n+3\right)}=\frac{3\left(n+1\right)}{n+3}$$

Ví dụ 7. Cho a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$\frac{a}{\left(b-c\right)^2}+\frac{b}{\left(c-a\right)^2}+\frac{c}{\left(a-b\right)^2}$$

Giải

Tìm cách giải. Quan sát phần giả thiết và kết luận của bài toán, chúng ta nhận thấy có nhiều điểm giống nhau. Do vậy, để không phức tạp chúng ta vận dụng giả thiết và tạo ra từng hạng tử của phần kết luận. Sau đó cộng lại.

Trình bày lời giải

Ta có: $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}=\frac{c}{b-a}\Leftrightarrow\frac{ac-a^2+b^2-bc}{\left(b-c\right)\left(c-a\right)}=\frac{c}{b-a}$$

$$\frac{a^2-b^2+bc-ca}{\left(b-c\right)\left(c-a\right)\left(a-b\right)}=\frac{c}{\left(a-b\right)^2}\quad(1)$$

Tương tự: $\frac{b}{\left(c-a\right)^2}=\frac{c^2-a^2+ab-bc}{\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c-a\right)}\quad(2)$

$$\frac{a}{\left(b-c\right)^2}=\frac{b^2-c^2+ca-ab}{\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c-a\right)}\quad(3)$$

Cộng từng vế của (1); (2) và (3) $\Rightarrow\frac{a}{\left(b-c\right)^2}+\frac{b}{\left(c-a\right)^2}+\frac{c}{\left(a-b\right)^2}$

Nhận xét. Từ kết quả ta thấy a. b, c không thể cùng dấu được do vậy bạn có thể giải được bài toán sau: Cho a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$. Chứng minh rằng trong ba số sau a, b, c tồn tại một số không âm và một số không dương.

C. Bài tập vận dụng

12.1. Rút gọn biểu thức: $A=\left(\frac{x}{x-2}-\frac{x^2-3}{x^2+2x+4}-\frac{7x+10}{x^3-8}\right):\frac{x+7}{x^2+2x+4}$

12.2. Chứng minh rằng với $x\neq0;x\neq\pm1$ thì biểu thức sau có giá trị không phụ thuộc vào biến.

$A=\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x}-\frac{x^2-x+1}{x^2-x}\right).\frac{x^4+x^3-x^2-x}{x+1}$

12.3. Rút gọn biểu thức: $A=\left(\frac{x-y}{2y-x}+\frac{x^2+y^2+y-2}{2y^2+xy-x^2}\right):\frac{4x^2+4x^2y+y^2-4}{x^2+y+xy+x}$

12.4. Cho biểu thức: $P=\left[\frac{(x-1)^2}{3x+(x-1)^2}-\frac{1-2x^2+4x}{x^3-1}+\frac{1}{x-1}\right]:\frac{2x}{x^3+x}$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) So sánh P với $\frac{1}{2}$.

12.5. Cho $P=\left(\frac{x^3-1}{x^2-x}+\frac{x^3+1}{x^2+x}\right):\frac{2\left(x^2-2x+1\right)}{x^2-x}$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm *x* nguyên để P nhận giá trị nguyên.

12.6. Cho $A=\left(\frac{x}{y^2+xy}-\frac{x-y}{x^2+xy}\right):\left(\frac{y^2}{x^3-xy^2}+\frac{1}{x+y}\right):\frac{x}{y}$

a) Rút gọn A

b) Tìm x, y để $A>1$ và $y<0$

12.7. Cho *x* là số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2+\frac{1}{x^2}=7$

Tính giá trị biểu thức $A=x^3+\frac{1}{x^3}$ và $B=x^5+\frac{2}{x^5}$

12.8. Thực hiện phép tính:

a) $A=\frac{1^4+4}{3^4+4}.\frac{5^4+4}{7^4+4}.\frac{9^4+4}{11^4+4}....\frac{17^4+4}{19^4+4}$;

b) $B=\frac{1^4+\frac{1}{4}}{2^4+\frac{1}{4}}.\frac{3^4+\frac{1}{4}}{4^4+\frac{1}{4}}.\frac{5^4+\frac{1}{4}}{6^4+\frac{1}{4}}...\frac{29^4+\frac{1}{4}}{30^4+\frac{1}{4}}$

12.9. Cho hai số thực a, b thỏa điều kiện $ab=1, a+b\neq 0$. Tính giá trị của biểu thức:

$P=\frac{1}{(a+b)^3}\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\right)+\frac{3}{(a+b)^4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{6}{(a+b)^5}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

12.10. Cho $x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}; y=\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}$

Tính giá trị biểu thức $P=xy+x+y$

12.11. Cho a, b, c là những số nguyên thỏa mãn: $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

Chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 3

12.12. Rút gọn biểu thức với *n* là số tự nhiên:

a) $B=\left(1-\frac{7}{6.12}\right).\left(1-\frac{7}{7.13}\right).\left(1-\frac{7}{8.14}\right)...\left(1-\frac{7}{n(n+6)}\right)$, với $n>5$

b) $C=\left(1+\frac{2^2}{1.5}\right).\left(1+\frac{2^2}{2.6}\right).\left(1+\frac{2^2}{3.7}\right)...\left(1+\frac{2^2}{n(n+4)}\right)$, với $n>0$

Hướng dẫn giải – đáp số

12.1. Ta có:

$$A=\left(\frac{x}{x-2}-\frac{x^2-3}{x^2+2x+4}-\frac{7x+10}{x^3-8}\right):\frac{x+7}{x^2+2x+4}$$

$$=\frac{x\left(x^2+2x+4\right)-\left(x^2-3\right)(x-2)-(7x+10)}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}:\frac{x+7}{x^2+2x+4}$$

$$=\frac{x^3+2x^2+4x-x^3+2x^2+3x-6-7x-10}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}:\frac{x+7}{x^2+2x+4}$$

$$=\frac{4x^2-16}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}.\frac{x^2+2x+4}{x+7}$$

$$=\frac{4(x-2)(x+2)}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}.\frac{x^2+2x+4}{x+7}=\frac{4(x+2)}{x+7}$$

12.2. Ta có:

$$A=\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)-(x+1)\left(x^2-x+1\right)}{x(x+1)(x-1)}.\frac{x\left(x^3+x^2-x-1\right)}{x+1}$$

$$=\frac{x^3-1-x^3-1}{(x+1)(x-1)}\frac{\left(x^2-1\right)(x+1)}{x+1}=\frac{-2}{(x+1)(x-1)}\frac{\left(x^2-1\right)(x+1)}{x+1}=-2$$

Vậy biểu thức $A=-2$ không phụ thuộc vào biến.

12.3. Ta có

$$A=\left(\frac{x-y}{2y-x}+\frac{x^2+y^2+y-2}{(x+y)(2y-x)}\right):\frac{\left(2x^2+y\right)^2-4}{x(x+y)+(x+y)}$$

$$=\frac{x^2-y^2+x^2+y^2+y-2}{(x+y)(2y-x)}:\frac{\left(2x^2+y-2\right)\left(2x^2+y+2\right)}{(x+y)(x+1)}$$

$$=\frac{2x^2+y-2}{(x+y)(2y-x)}\frac{(x+y)(x+1)}{(2x^2+y-2)(2x^2+y+2)}=\frac{x+1}{(2y-x)(2x^2+y+2)}$$

12.4.

a) Ta có: $P=\left[\frac{(x-1)^2}{3x+(x-1)^2}-\frac{1-2x^2+4x}{x^3-1}+\frac{1}{x-1}\right]:\frac{2x}{x^3+x}$ (ĐK: $x\pm 1;0$)

$$P=\left[\frac{(x-1)^3}{(x-1)(x^2+x+1)}-\frac{1-2x^2+4x}{(x-1)(x^2+x+1)}+\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}\right]:\frac{2}{x^2+1}$$

$$=\left[\frac{x^3-3x^2+3x-1-1+2x^2+4x+x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}\right]:\frac{2}{x^2+1}$$

$$=\frac{x^3-1}{(x-1)(x^2+x+1)}\frac{x^2+1}{2}=\frac{x^2+1}{2}$$

b) $P=\frac{x^2+1}{2}\geq\frac{1}{2}$

dấu bằng không xảy ra. Vậy $P>\frac{1}{2}$

12.5.

a) Ta có: $P=\left(\frac{x^3-1}{x^2-x}+\frac{x^3+1}{x^2+x}\right):\frac{2(x^2-2x+1)}{x^2-x}$

$$=\left(\frac{x^2+x+1}{x}+\frac{x^2-x+1}{x}\right):\frac{2(x-1)}{x}$$

$$=\left(\frac{2x^2+2}{x}\right):\frac{2(x-1)}{x}=\frac{x^2+1}{x}.\frac{x}{x-1}=\frac{x^2+1}{x-1}$$

ĐK: $x\neq 0, x\neq 1$

b) Ta có $P=\frac{x^2+1}{x-1}=x+1+\frac{2}{x-1}$ vì $x\in Z\Rightarrow x+1\in Z\Leftrightarrow\frac{2}{x-1}\in Z$

$\Leftrightarrow x-1\in$ Ư(2) suy ra:

$x-1$	1	2	-1	-2
x	2	3	0	-1

Kết hợp với tập xác định $x\in\{0;1;-1\}$ thì $x\in\{2;3\}$ ta được $P\in Z$.

12.6.

a) Ta có: $A=\left(\frac{x}{y^2+xy}-\frac{x-y}{x^2+xy}\right):\left(\frac{y^2}{x^3-xy^2}+\frac{1}{x+y}\right):\frac{x}{y}$

$$A=\left(\frac{x^2}{xy(x+y)}-\frac{xy-y^2}{xy(x+y)}\right):\left(\frac{y^2}{x(x+y)(x-y)}+\frac{x^2-xy}{x(x-y)(x+y)}\right):\frac{x}{y}$$

$$=\frac{x^2-xy+y^2}{xy(x+y)}:\frac{x^2-xy+y^2}{x(x-y)(x+y)}:\frac{x}{y}=\frac{x(x-y)(x+y)}{xy(x+y)}:\frac{x}{y}=\frac{x-y}{x}$$

ĐK: $xy\neq 0, x\neq \pm y$

b) $A>1\Leftrightarrow \frac{-y}{x}>0\Leftrightarrow x>0$

12.7. Từ $x^2+\frac{1}{x^2}=7\Leftrightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}=9\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=9\Rightarrow x+\frac{1}{x}=3$ (vì $x>0$)

Ta có $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=3.7\Leftrightarrow x^3+\frac{1}{x^3}+x+\frac{1}{x}=21\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}+3=21$

$\Rightarrow A=18$

Ta có: $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=7.18\Leftrightarrow \mathrm{x}^5+\frac{1}{x^5}+x+\frac{1}{x}=126\Rightarrow \mathrm{x}^5+\frac{1}{x^5}+3=126$

$\Rightarrow B=123$

12.8.

a) Xét $k^4+4=\left(k^2+2\right)^2-4k^2=\left(k^2+2-2k\right)\left(k^2+2k+2\right)$

$=\left[(k-1)^2+1\right]\left[(k+1)^2+1\right]$

Áp dụng kết quả trên với $k=1,3,5,...,19$. Ta có:

$$A=\frac{\left(0^2+1\right)\left(2^2+1\right)\left(4^2+1\right)\left(6^2+1\right)\left(8^2+1\right)\left(10^2+1\right)}{\left(2^2+1\right)\left(4^2+1\right)\left(6^2+1\right)\left(8^2+1\right)\left(10^2+1\right)\left(12^2+1\right)}\cdots\frac{\left(16^2+1\right)\left(18^2+1\right)}{\left(18^2+1\right)\left(20^2+1\right)}$$

$$=\frac{1}{20^2+1}=\frac{1}{401}$$

b) Tương tự câu a, áp dụng công thức:

$$k^4+\frac{1}{4}=\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]$$

Ta được kết quả $B=\frac{1}{1241}$

12.9. Với $ab=1, a+b\neq 0$, ta có:

$$P=\frac{a^3+b^3}{(a+b)^3(ab)^3}+\frac{3\left(a^2+b^2\right)}{(a+b)^4(ab)^2}+\frac{6(a+b)}{(a+b)^5(ab)}$$

$$=\frac{a^3+b^3}{(a+b)^3}+\frac{3(a^2+b^2)}{(a+b)^4}+\frac{6(a+b)}{(a+b)^5}=\frac{a^2+b^2-1}{(a+b)^2}+\frac{3(a^2+b^2)}{(a+b)^4}+\frac{6}{(a+b)^4}$$

$$=\frac{(a^2+b^2-1)(a+b)^2+3(a^2+b^2)+6}{(a+b)^4}$$

$$=\frac{(a^2+b^2-1)(a^2+b^2+2)+3(a^2+b^2)+6}{(a+b)^4}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)^2+4(a^2+b^2)+4}{(a+b)^4}=\frac{(a^2+b^2+2)^2}{(a+b)^4}$$

$$=\frac{(a^2+b^2+2ab)^2}{(a+b)^4}=\frac{\left[(a+b)^2\right]^2}{(a+b)^4}=1$$

Vậy $P=1$, với $ab=1, a+b\neq 0$.

12.10. Xét $x+1=\frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc}$

Xét $y+1=\frac{b^2+2bc+c^2-b^2+2bc-c^2}{(b+c-a)(b+c+a)}=\frac{4bc}{(b+c-a)(b+c+a)}$

Vậy $P=xy+x+y=(x+1)(y+1)-1=2-1=1$

12.11. Ta có: $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ (1)

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2}{ab}+\frac{2}{bc}+\frac{2}{ca}$$

$=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2(a+b+c)}{abc}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{2(a+b+c)}{abc}=0\Rightarrow a+b+c=0$

Ta có: $a^3+b^3+c^3=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3=(a+b+c)^3-3abc(a+b+c)-3ab(-c)=3abc\,\vdots\,3$

12.12.

a) Xét $1-\frac{7}{k(k+6)}=\frac{k^2+6k-7}{k(k+6)}=\frac{(k-1)(k+7)}{k(k+6)}$

thay $k=6;7;8;...;n$ ta được:

$$B=\frac{5.13}{6.12}\frac{6.14}{7.13}\frac{7.15}{8.14}...\frac{(n-1)(n+7)}{n(n+6)}=\frac{5.6.7...(n-1)}{6.7.8...n}\frac{13.14.15...(n+7)}{12.13.14...(n+6)}$$

$$=\frac{6(n+7)}{12n}$$

b) Xét $1+\frac{2^2}{k(k+4)}=\frac{k^2+4k+2^2}{k(k+4)}=\frac{(k+2)^2}{k(k+4)}$

thay $k=1;2;3;...;n$ ta được:

$$C=\frac{3^2}{1.5}.\frac{4^2}{2.6}.\frac{5^2}{3.7}...\frac{(n+2)^2}{n(n+4)}=\frac{3.4.(n+2)}{1.2.(n+4)}=\frac{6(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)}$$

Chuyên đề 13. BIẾN ĐỔI CÁC PHÂN THỨC HỮU TỈ

A. Kiến thức cần nhớ

- Một biểu thức là một phân thức hoặc biểu thị một dãy phép toán cộng, trừ, nhân, chia trên những phân thức gọi là biểu thức hữu tỉ.
- Nhờ các quy tắc của các phép toán cộng, trừ, nhân, chia các phân thức ta có thể biến đổi biểu thức hữu tỉ thành một phân thức.
- Điều kiện của biến để giá trị tương ứng của mẫu thức khác 0 là điều kiện để giá trị của phân thức được xác định.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức: $A=x-3+\dfrac{\left(1-\dfrac{6-x}{3}\right).\dfrac{1}{2}}{2}-\dfrac{\dfrac{x}{2}-\dfrac{3+x}{4}}{2}$

Giải

Tìm cách giải. Đối với những biểu thức phức tạp, nhiều tầng lớp phân thức, chúng ta nên biến đổi dần dần ở tử thức của từng phân thức trước. Sau đó được biểu thức đơn giản hơn, rồi rút gọn tiếp.

Trình bày lời giải

Ta có: $A=x-3+\dfrac{\left(1-\dfrac{6-x}{3}\right).\dfrac{1}{2}}{2}-\dfrac{\dfrac{x}{2}-\dfrac{3+x}{4}}{2}$

$$=x-3+\frac{\dfrac{3-6+x}{3}}{4}-\frac{2x-3-x}{8}$$

$$=x-3+\frac{x-3}{12}-\frac{x-3}{8}=(x-3)\left(1+\frac{1}{12}-\frac{1}{8}\right)=\frac{23x-69}{24}$$

Ví dụ 2. Cho biểu thức

$$A=\left[\frac{3}{2}-\left(x^4-\frac{x^4+1}{x^2+1}\right).\frac{x^3-x(4x-1)-4}{x^7+6x^6-x-6}\right]:\frac{x^2+29x+78}{3x^2+12x-36}$$

a) Rútt gọn biểu thức A.

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho A có giá trị nguyên.

Giải

Tìm cách giải. Những biểu thức có nhiều ngoặc, chúng ta thực hiện trong ngoặc tròn trước, sau đó thực hiện đến ngoặc vuông. Khi thực hiện chúng ta nên rút gọn biểu thức nếu có thể nhằm đưa về những phân thức đơn giản hơn.

Trình bày lời giải

a) Ta có

$$A=\left[\frac{3}{2}-\frac{x^6+x^4-x^4-1}{x^2+1}.\frac{x^3-4x^2+x-4}{(x+6)(x^6-1)}\right]:\frac{(x+3)(x+26)}{3(x+6)(x-2)}$$

$$=\left[\frac{3}{2}-\frac{x^6-1}{x^2+1}\frac{(x-4)(x^2+1)}{(x+6)(x^6-1)}\right].\frac{3(x+6)(x-2)}{(x+3)(x+26)}$$

$$=\left[\frac{3}{2}-\frac{x-4}{x+6}\right].\frac{3(x+6)(x-2)}{(x+3)(x+26)}$$

$$=\frac{3x+18-2x+8}{2(x+6)}.\frac{3(x+6)(x-2)}{(x+3)(x+26)}$$

$$=\frac{x+26}{2(x+6)}\frac{3(x+6)(x-2)}{(x+3)(x+26)}=\frac{3x-6}{2x+6}$$

b) Tập xác định $x\notin\{1;2;-3;-6;-26\}$

$$A\in Z\Rightarrow 2A=\frac{6x-12}{2x+6}=\frac{3x-6}{x+3}=3-\frac{15}{x+3}\in Z$$

Suy ra các trường hợp sau:

$x+3$	1	-1	3	-3	5	-5	15	-15
x	-2	-4	0	-6	2	-8	12	-18

So sánh với tập xác định và thử lại thì $x\in\{-2;-4;0;-8;12;-18\}$ thì $A\in Z$

Ví dụ 3. Cho biểu thức $M=\left(\frac{a^2+a-2}{a^{n+1}-3a^n}\right)\left[\frac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\frac{3}{a^2-a}\right](n\in N^*)$

a) Rút gọn M.

b) Với $a>2$. Chứng minh rằng: $0<M<1$

Giải

a) Ta có: $M=\frac{(a-1)(a+2)}{a^n(a-3)}.\left[\frac{4a+4}{4(a+1)(a-1)}-\frac{3}{a(a-1)}\right]$

$$=\frac{(a-1)(a+2)}{a^n(a-3)}\left[\frac{4a}{4a(a-1)}-\frac{12}{4a(a-1)}\right]$$

$$=\frac{(a-1)(a+2)}{a^n(a-3)}.\left[\frac{a-3}{a(a-1)}\right]=\frac{a+2}{a^{n+1}}$$

b) Ta có: $M=\frac{a+2}{a^{n+1}}<\frac{a+a}{a^{n+1}}$ (vì $a<2$) $\Rightarrow M<\frac{2a}{a^{n+1}}=\frac{2}{a^n}<\frac{2}{2^n}<1$

mặt khác: $a+2>0;a^{n+1}>0\Rightarrow M>0$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 4. Rút gọn biểu thức $P = \dfrac{\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+1\right)\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)^2}{\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}-\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)}$

Giải

Ta có: $P = \dfrac{\dfrac{x^2+y^2+xy}{xy}\left(\dfrac{x-y}{xy}\right)^2}{\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}-\dfrac{x^2+y^2}{xy}}$

$= \dfrac{x^2+xy+y^2}{xy}.\dfrac{(x-y)^2}{x^2y^2}:\dfrac{x^4+y^4-(x^2+y^2)xy}{x^2y^2}$

$= \dfrac{x^2+xy+y^2}{xy}.\dfrac{(x-y)^2}{x^2y^2}:\dfrac{x^4+y^4-x^3y-y^3x}{x^2y^2}$

$= \dfrac{x^2+xy+y^2}{xy}.\dfrac{(x-y)^2}{x^2y^2}.\dfrac{x^2y^2}{(x-y)(x^3-y^3)}$

$= \dfrac{x^2+xy+y^2}{xy}.\dfrac{(x-y)^2}{x^2y^2}.\dfrac{x^2y^2}{(x-y)^2(x^2+xy+y^2)} = \dfrac{1}{xy}$

Ví dụ 5. Giả sử x, y, z là các số thực khác không, thỏa mãn hệ đẳng thức:

$$\begin{cases} x\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)+y\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}\right)+z\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=-2 \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases}$$

Hãy tính giá trị của biểu thức: $P = \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$

(Tuyển sinh lớp 10, Trường THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, năm học 2001 – 2002)

Giải

Tìm cách giải. Bài toán này thuộc dạng tính giá trị biết điều kiện của biến số. Quan sát, nhận thấy bài toán có hai điều kiện nhưng có ba biến số (số biến nhiều hơn số điều kiện). Do điều kiện hai đơn giản, không phân tích tiếp được. Với điều kiện thứ nhất, chúng ta biến đổi và nhận thấy phân tích thành nhân tử được, tìm được mối quan hệ giữa hai trong ba biến. Từ đó tìm được cách giải sau.

Trình bày lời giải.

Từ đẳng thức: $x\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)+y\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}\right)+z\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=-2$

Ta có: $2xyz+x^2z+x^2y+y^2z+z^2y+z^2x=0$

$\Leftrightarrow \left(xyz+x^2z\right)+\left(xyz+y^2z\right)+\left(x^2y+y^2x\right)+\left(z^2x+z^2y\right)=0$

$$\Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z+x=0 \end{cases}$$

Không mất tổng quát, giả sử $x+y=0 \Rightarrow x^3+y^3=0$

Từ $x^3+y^3+z^3=1$ thì $z^3=1 \Rightarrow z=1$

Vậy $P=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{x+y}{xy}+\frac{1}{1}=0+1=1$

C. Bài tập vận dụng

13.1. Rút gọn

$$A=\left(a+\frac{2}{0,5a+1}\right):\frac{a^3-8}{a+2}+\frac{2}{2a-a^2}$$

13.2. Rút gọn biểu thức:

a) $A=\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right).\dfrac{1+\dfrac{a}{b+c}}{1-\dfrac{a}{b+c}}.\dfrac{b^2+c^2-(b-c)^2}{a+b+c}$

b) $B=\left(\dfrac{y^2-yz+z^2}{x}+\dfrac{x^2}{y+z}-\dfrac{3}{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}}\right).\dfrac{\dfrac{2}{y}+\dfrac{2}{z}}{\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xz}}+(x+y+z)^2$

13.3. Cho $A=\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{x^2-3x}\right):\left(\dfrac{x^2}{27-3x^2}+\dfrac{1}{x+3}\right)$

a) Rút gọn A

b) Tìm x để $A<-1$

13.4. Cho biểu thức $M=\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^3-2x^2-3x}\left[\dfrac{(x+2)^2-x^2}{4x^2-4}-\dfrac{3}{x^2-x}\right]$

Rút gọn biểu thức M và tính giá trị của x khi $M=3$

13.5. Cho biểu thức: $A=\left(\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{2}{2-x}+\dfrac{1}{x+2}\right):\left(x-2+\dfrac{10-x^2}{x+2}\right)$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của A. Biết $|x|=\dfrac{1}{2}$

c) Tìm giá trị của x để $A<0$

d) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

13.6. Cho $Q=\dfrac{12x-45}{x^2-7x+12}-\dfrac{x+5}{x-4}+\dfrac{2x+3}{3-x}$

a) Rút gọn biểu thức Q.

b) Tính giá trị Q tại $|x|=3$

c) Tìm giá trị nguyên của *x* để Q nhận giá trị nguyên.

13.7. Cho *x*, *y* là hai số thay đổi luôn thỏa mãn điêu kiện: $x>0, y<0$ và $x+y=1$.

a) Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{y-x}{xy}:\left[\dfrac{y^2}{(x-y)^2}-\dfrac{2x^2y}{(x^2-y^2)^2}+\dfrac{x^2}{y^2-x^2}\right]$

b) Chứng minh rằng: $A=-4$

13.8. Cho *x*, *y*, *z* thỏa mãn $x+y+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$ và $xyz=1$

Tính giá trị $M=\dfrac{x^6+y^6+z^6}{x^3+y^3+z^3}$

13.9. Cho $a\notin\{0;1;-1\}$ và $x_1=\dfrac{a-1}{a+2};x_2=\dfrac{x_1-1}{x_1+1};x_3=\dfrac{x_2-1}{x_2+1};...$

Tìm a nếu $x_{2020}=3$

13.10. Cho $M=\dfrac{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6-\left(x^6+\dfrac{1}{x^6}\right)-2}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3+x^3+\dfrac{1}{x^3}}$

a) Rút gọn M.

b) Cho $x>0$, tìm giá trị nhỏ nhất của M.

13.11. Cho biểu thức $A=\left[\left(\dfrac{1-x^3}{1-x}+x\right).\left(\dfrac{1+x^3}{1+x}-x\right)\right]:\dfrac{(1-x^2)^2}{1+x^2}$

Chứng tỏ rằng biểu thức A dương với mọi $x\neq\pm1$

13.12. Cho $P=\left[\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}+\dfrac{2}{xy}:\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^2\right].\dfrac{1}{x-y}$

Và $Q=\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{2xy}{(x^2-y^2)(x+y)}+\dfrac{3}{x^2-2x+2}$

Với giá trị nào của x; y thì P – Q đạt giá trị nhỏ nhất.

13.13. Rút gọn $A=2\left|\dfrac{y-x}{xy}\right|+\left|\dfrac{y+x}{xy}-\dfrac{2}{z}\right|+\dfrac{y+x}{xy}+\dfrac{2}{z}$ trong đó $x>5$ và

$$y=\frac{x^2-25}{x+\frac{10x+25}{x}};z=\frac{x^2-25}{x+\frac{15x+25}{x-5}}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

13.1. Ta có: $A=\left(a+\frac{2}{0,5a+1}\right):\frac{a^3-8}{a+2}+\frac{2}{2a-a^2}(a\neq\pm2;0)$

$$A=\left(\frac{a^2+2a}{a+2}+\frac{4}{a+2}\right):\frac{(a-2)(a^2+2a+4)}{a+2}-\frac{2}{a(a-2)}$$

$$=\frac{a^2+2a+4}{a+2}:\frac{(a-2)(a^2+2a+4)}{a+2}-\frac{2}{a(a-2)}$$

$$=\frac{1}{a-2}-\frac{2}{a(a-2)}=\frac{a-2}{a(a-2)}=\frac{1}{a}$$

13.2.

a) $A=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\frac{b+c+a}{b+c-a}\frac{b^2+c^2-b^2+2bc-c^2}{a+b+c}$

$$=\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc}.\frac{b+c+a}{b+c-a}\frac{2bc}{a+b+c}=a+b+c$$

b) $B=\left(\frac{y^2-yz+z^2}{x}+\frac{x^2}{y+z}-\frac{3yz}{y+z}\right).\frac{\frac{2(x+y)}{yz}}{\frac{x+y+z}{xyz}}+(x+y+z)^2$

$$=\frac{(y+z)(y^2-yz+z^2)+x^3-3xy}{x(y+z)}\frac{2x(x+y)}{x+y+z}+(x+y+z)^2$$

$$=\frac{y^3+z^3+x^3-3xyz}{1}\frac{2}{x+y+z}+(x+y+z)^2$$

$$=\frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).2}{(x+y+z)}+(x+y+z)^2$$

$$=2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx+x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$$

$$=3x^2+3y^2+3z^2$$

13.3.

a) Ta có $A=\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{x^2-3x}\right):\left(\frac{x^2}{27-3x^2}+\frac{1}{x+3}\right)(x\neq0;\pm3)$

$$=\left[\frac{x^2-3x+9}{3x(x-3)}\right]:\left[\frac{-x^2}{3(x-3)(x+3)}+\frac{3x-9}{3(x-3)(x+3)}\right]$$

$$=\left[\frac{x^2-3x+9}{3x(x-3)}\right]:\left[\frac{-x^2+3x-9}{3(x-3)(x+3)}\right]=\frac{-x-3}{x}$$

b) $A<-1 \Leftrightarrow A+1<0 \Leftrightarrow \frac{-x-3}{x}+1<0 \Leftrightarrow \frac{-3}{x}<0 \Leftrightarrow x>0$

vậy $x>0; x\neq 3$ thì $A<-1$

13.4.

Ta có: $M=\frac{x^2(x+2)-(x+2)}{x^2(x+1)-3x(x+1)}.\left[\frac{x-3}{x(x-1)}\right]$. TXĐ $x\neq\{0;1;-1\}$

$$=\frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{x(x-3)(x+1)}\left[\frac{x-3}{x(x-1)}\right]=\frac{x+2}{x^2}$$

$$M=\frac{x+2}{x^2}=3 \Leftrightarrow 3x^2=x+2 \Leftrightarrow (3x+2)(x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \text{(loại)} \\ x=\frac{-2}{3} \text{(thỏa mãn)} \end{array}\right.$$

13.5.

a) Ta có: $A=\left(\frac{x}{x^2-4}+\frac{2}{2-x}+\frac{1}{x+2}\right):\left(x-2+\frac{10-x^2}{x+2}\right)(x\neq\pm 2)$

$$A=\left[\frac{x}{(x-2)(x+2)}-\frac{2(x+2)}{(x-2)(x+2)}+\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}\right]:\left(\frac{x^2-4}{x+2}+\frac{10-x^2}{x+2}\right)$$

$$A=\left[\frac{x+x-2-2x-4}{(x-2)(x+2)}\right]:\left(\frac{x^2-4+10-x^2}{x+2}\right)$$

$$A=\frac{-6}{(x-2)(x+2)}:\frac{6}{x+2}=\frac{1}{2-x}$$

b) $|x|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \text{(thỏa mãn)} \\ x=-\frac{1}{2} \text{(thỏa mãn)} \end{array}\right.$

với $x=\frac{1}{2}$ thì $A=\frac{1}{1,5}=\frac{2}{3}$

với $x=-\frac{1}{2}$ thì $A=\frac{1}{2,5}=\frac{2}{5}$

c) $A<0 \Leftrightarrow 2-x<0 \Leftrightarrow x>2$

Vậy với $x>2$ thì $A<0$

d) $A \in Z \Leftrightarrow 1 \vdots (2-x) \in \{\pm 1\} \Leftrightarrow x \in \{3;1\}$

Vậy với $x \in \{3;1\}$ thì $A \in Z$

13.6.

a) TXĐ: $x \neq 3; x \neq 4$

Ta có: $Q = \dfrac{12x-45}{(x-3)(x-4)} - \dfrac{x+5}{x-4} - \dfrac{2x+3}{x-3}$

$= \dfrac{12x-45-(x+5)(x-3)-(2x+3)(x-4)}{(x-3)(x-4)}$

$= \dfrac{12x-45-x^2+3x-5x+15-2x^2+8x-3x+12}{(x-3)(x-4)}$

$= \dfrac{-3x^2+15x-18}{(x-3)(x-4)} = \dfrac{-3(x-2)(x-3)}{(x-3)(x-4)} = \dfrac{-3(x-2)}{x-4}$

b) $|x| = 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-3 \end{array}\right.$

$x = 3$ (loại)

Với $x = -3$ thì $Q = \dfrac{-15}{7}$

c) $Q = \dfrac{-3x+6}{(x-4)} = -3 - \dfrac{6}{x-4}$

$Q \in Z \Leftrightarrow \dfrac{6}{x-4} \in Z \Rightarrow x-4 \in$ Ư(6)

Mà Ư(6) $= \{1;2;3;6;-1;-2;-3;-6\}$

$x-4$	1	2	3	6	-1	-2	-3	-6
x	5	6	7	10	3	2	1	-2

Kết hợp với tập xác định, ta có:

$x \in \{-2;1;2;5;6;7;10\}$ thì Q nhận giá trị nguyên.

13.7.

a) Do $x+y=1$ suy ra $\left(x^2-y^2\right)^2 = (x-y)^2$ và $y^2-x^2 = -(x-y)$

suy ra: $A = \dfrac{y-x}{xy} : \left[\dfrac{y^2}{(x-y)^2} - \dfrac{2x^2y}{\left(x^2-y^2\right)^2} + \dfrac{x^2}{y^2-x^2}\right]$

$= \dfrac{y-x}{xy} : \left[\dfrac{y^2-2x^2y-x^2(x-y)}{(x-y)^2}\right] = \dfrac{y-x}{xy} : \dfrac{y^2-2x^2y-x^3+x^2y}{(x-y)^2}$

$$=\frac{y-x}{xy}:\frac{y^2-x^3-x^2y}{(x-y)^2}=\frac{y-x}{xy}:\frac{y^2-x^2(x+y)}{(x-y)^2}$$

$$=\frac{y-x}{xy}:\frac{y^2-x^2}{(x-y)^2}=\frac{y-x}{xy}\frac{(x-y)^2}{y-x}=\frac{(x-y)^2}{xy}$$

b) Ta có: $A=\frac{(x+y)^2-4xy}{xy}=\frac{(x+y)^2}{xy}-4=\frac{1}{xy}-4<-4$ vì theo giả thiết $x>0,y<0$

13.8. Ta có: $x+y+z=0\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz=3$

$xy+yz+zx=0\Leftrightarrow x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3=3xy.yz.zx=3$

$x^6+y^6+z^6=\left(x^3+y^3+z^3\right)^2-2x^3y^3-2y^3z^3-2z^3x^3=0-2.3=3$

Vậy $M=1$

13.9. Ta có: $x_2=\frac{x_1-1}{x_1+1}=\frac{-3}{2a+1};x_3=\frac{-2a-4}{2a-2}=\frac{-a-2}{a-1}$;

$x_4=\frac{-a-2-a+1}{-3}=\frac{2a+1}{3};x_5=\frac{a-1}{a+2}$

Vậy $x_k=x_{k+4}=x_{k+8}=...$

$x_{2020}=x_4=3\Leftrightarrow\frac{2a+1}{3}=3$

Vậy $a=4$

13.10.

a) Ta có:

$$M=\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6-\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\right]\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\right]}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}-\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)=3x+\frac{3}{x}$$

b) $M=3x+\frac{3}{x}\ge 2\sqrt{3x.\frac{3}{x}}=6$

dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 6 khi $x=1$.

13.11. Ta có

$$A=\left[\left(\frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x}+x\right)\left(\frac{(1+x)(1-x+x^2)}{1+x}-x\right)\right]:\frac{(1-x^2)^2}{1+x^2}$$

$$=\left(1+x+x^2+x\right)\left(1-x+x^2-x\right):\frac{\left(1-x^2\right)^2}{1+x^2}$$

$$=\left(1+x\right)^2\left(1-x\right)^2\frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2}=\left(1-x^2\right)^2\frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2}=1+x^2$$

Vì $x^2\geq 0$ do đó $A=1+x^2>0$ với mọi $x\neq\pm 1$

13.12.

Ta có: $P=\left[\frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)^2}+\frac{2}{xy}:\frac{(x+y)^2}{x^2y^2}\right].\frac{1}{x-y}$

$$P=\left[\frac{x-y}{x+y}+\frac{2}{xy}.\frac{x^2y^2}{(x+y)^2}\right]\frac{1}{x-y}=\left[\frac{x-y}{x+y}+\frac{2xy}{(x+y)^2}\right].\frac{1}{x-y}$$

$$P=\frac{x-y}{x+y}.\frac{1}{x-y}+\frac{2xy}{(x+y)^2}.\frac{1}{x-y}=\frac{1}{x+y}+\frac{2xy}{\left(x^2-y^2\right)(x+y)}$$

Suy ra $P-Q=-\frac{3}{x^2-2x+2}=\frac{-3}{(x-1)^2+1}\geq -3$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P-Q$ là -3 khi $x=1$; y tùy ý khác $\{1;0;-1\}$

13.13. Ta có $y=\frac{(x-5)(x+5)}{\frac{x+10x+5}{x}}=\frac{x(x-5)(x+5)}{(x+5)^2}=\frac{x(x-5)}{(x+5)}$

$$z=\frac{(x-5)(x+5)}{\frac{x^2-5x+15x+25}{x-5}}=\frac{(x-5)^2(x+5)}{(x+5)^2}=\frac{(x-5)^2}{x+5}$$

Từ đó suy ra: $xy=\frac{x^2(x-5)}{x+5}$

$$y-x=\frac{x^2-5x}{x+5}-x=\frac{x^2-5x-x^2-5x}{x+5}=\frac{-10x}{x+5}$$

$$\Rightarrow\frac{y-x}{xy}=\frac{-10x}{x+5}:\frac{x^2(x-5)}{x+5}=\frac{-10x}{x+5}.\frac{x+5}{x^2(x-5)}=\frac{-10}{x(x-5)}$$

$$y+x=\frac{x^2-5x}{x+5}+x=\frac{x^2-5x+x^2+5x}{x+5}=\frac{2x^2}{x+5}$$

$$\Rightarrow\frac{y+x}{xy}=\frac{2x^2}{x+5}:\frac{x^2(x-5)}{x+5}=\frac{2x^2}{x+5}.\frac{x+5}{x^2(x-5)}=\frac{2}{x-5}$$

Do vậy $A=2\left|\frac{-10}{x(x-5)}\right|+\left|\frac{2}{x-5}-\frac{2(x+5)}{(x-5)^2}\right|+\frac{2}{x-5}+\frac{2(x+5)}{(x-5)^2}$

$$=2\frac{10}{x\left(x-5\right)}+\left|\frac{2\left(x-5\right)-2\left(x+5\right)}{\left(x-5\right)^2}\right|+\frac{2\left(x-5\right)+2\left(x+5\right)}{\left(x-5\right)^2}$$

$$=\frac{20}{x\left(x-5\right)}+\left|\frac{-20}{\left(x-5\right)^2}\right|+\frac{4x}{\left(x-5\right)^2}=\frac{20}{x\left(x-5\right)}+\frac{20}{\left(x-5\right)^2}+\frac{4x}{\left(x-5\right)^2}$$

$$=\frac{20\left(x-5\right)+20x+4x^2}{x\left(x-5\right)^2}=\frac{4x^2+40x-100}{x\left(x-5\right)^2}$$

Chuyên đề 14. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ

A. Một số ví dụ

Chứng minh đẳng thức đại số là bằng phép biến đổi đại số, chúng ta chứng minh hai vế bằng nhau trên tập xác định của chúng. Trong các chuyên đề trước chúng ta đã gặp và giải một số bài tập liên quan tới chứng minh đẳng thức đại số. Trong chuyên đề này, chúng ta khắc sâu một số kỹ thuật biến đổi chứng minh đẳng thức đại số.

I. BIẾN ĐỔI VẾ NÀY THÀNH VẾ KIA

Ví dụ l. Với n nguyên dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4+1^4}+\frac{3}{4+3^4}+...+\frac{2n-1}{4+(2n-1)^4}=\frac{n^2}{4n^2+1}$$

(Tuyển sinh lớp 10, Trường THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, năm học 2009 - 2010)

Giải

Tìm cách giải. Quan sát đẳng thức, chúng ta nhận thấy vế trái là tổng những phân thức viết theo quy luật và vế trái dài, phức tạp hơn vế phải. Những bài toán có một vế phức tạp và một vế đơn giản, chúng ta biến đổi vế phức tạp thành vế đơn giản. Do đó chúng ta định hướng biến đổi vế trái thành vế phải.

Nhận thấy nếu vế trái là tổng những phân thức viết theo quy luật, thì chúng ta tách mỗi phân thức thành hiệu hai phân thức để khử liên tiếp.

Trình bày lời giải

Ta có: $4+m^4=\left(m^4+4m^2+4\right)-4m^2=\left(m^2+2\right)^2-(2m)^2$

$=\left(m^2+2m+2\right)\left(m^2-2m+2\right)=\left[(m+1)^2+1\right]\left[(m-1)^2+1\right]$

Thay $m=2k+1$ ta có:

$\Rightarrow 4+(2k-1)^4=\left[(2k)^2+1\right]\left[(2k-2)^2+1\right]$

Nên $\frac{1}{(2k-2)^2+1}-\frac{1}{(2k)^2+1}=\frac{(2k)^2+1-(2k-2)^2-1}{4+(2k-1)^4}=\frac{4(2k-1)}{4+(2k-1)^4}$

$$\Rightarrow \frac{2k-1}{4+(2k-1)^2}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(2k-2)^2+1}-\frac{1}{(2k)^2+1}\right]$$

Cho $k=1,2,3,...n$ ta được:

$$VT=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{0^2+1}-\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^2+1}-\frac{1}{4^2+1}+...+\frac{1}{(2n-2)^2+1}-\frac{1}{(2n)^2+1}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[1-\frac{1}{4n^2+1}\right]=\frac{n^2}{1+4n^2}$$

Suy ra VT = VP. Điều phải chứng minh.

II. BIẾN ĐỔI CẢ HAI VẾ CÙNG BẰNG BIỂU THỨC THỨ BA

Ví dụ 2. Chứng minh đẳng thức:

$$\frac{a^2+3ab}{a^2-9b^2}+\frac{2a^2-5ab-3b^2}{6ab-a^2-9b^2}=\frac{a^2+ab+ac+bc}{3bc-a^2-ac+3ab}$$

Giải

Tìm cách giải. Đẳng thức này nhận thấy vế phải có c, vế trái không có c. Tức là có thể biến đổi rút gọn nhằm triệt tiêu c. Vế trái là tổng hai phân thức, vế phải là một phân thức, do vậy ta có thể biến đổi vế trái thành một phân thức và rút gọn.

Những bài toán hai vế đều phức tạp, chúng ta có thể biến đổi cả hai vế, và chứng tỏ cùng bằng biểu thức thứ ba.

Trình bày lời giải

- Biến đổi vế phải.

$$VP=\frac{(a+b)(a+c)}{3b(c+a)-a(a+c)}=\frac{(a+b)(a+c)}{(a+c)(3b-a)}=\frac{a+b}{3b-a} \quad (1)$$

- Biến đổi vế trái.

$$VT=\frac{a(a+3b)}{(a-3b)(a+3b)}+\frac{(a-3b)(2a+b)}{-(a-3b)^2}$$

$$=\frac{a}{a-3b}-\frac{2a+b}{a-3b}=\frac{-a-b}{a-3b}=\frac{a+b}{3b-a} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có vế trái bằng vế phải, suy ra điều phải chứng minh.

III. TỪ ĐIỀU KIỆN TẠO RA THÀNH PHẦN MỘT VẾ

Ví dụ 3. Cho $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+c}=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+c}=0$$

Giải

Tìm cách giải. Quan sát kĩ phần giả thiết và phần kết luận. Chúng ta thấy có phần giống nhau và phần khác nhau. Từ giả thiết chúng ta có thể tạo ra vế trái của đẳng thức. Do vậy từ giả thiết chúng ta cần nhân với bộ phận thích hợp để tạo ra vế trái của đẳng thức, sau đó biến đổi phần còn lại triệt tiêu.

Trình bày lời giải

Từ giả thiết, nhân hai vế với a + b + c.

$$\Rightarrow\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right).(a+b+c)=a+b+c$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c}+a+\frac{b^2}{c+a}+b+c+\frac{c^2}{a+b}=a+b+c$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0$$

Điều phải chứng minh.

Nhận xét. Quan sát mẫu thức: b + c; c + a; a + b ta thấy chúng không thể cùng dấu được. Nên ta có thể thay kết luận bằng kết luận: trong ba số a, b, c có ít nhất một số âm, ít nhất một số dương.

IV. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

Ví dụ 4. Với a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn đẳng thức

$(a+b)(b+c)(c+a)=8abc.$ Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}=\frac{3}{4}+\frac{ab}{(a+b)(b+c)}+\frac{bc}{(b+c)(c+a)}+\frac{ca}{(c+a)(a+b)}$$

(Tuyển sinh lớp 10, Trường THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội,

năm học 2013 - 2014)

Giải

Tìm cách giải. Bài toán này là chứng minh đẳng thức có điều kiện. Bài toán này có thể vận dụng điều kiện và biến đổi cả hai vế cùng bằng biểu thức thứ ba.

Tuy nhiên, trong ví dụ này chúng ta sử dụng phương pháp biến đổi tương đương. Phương pháp biến đổi tương đương là muốn chứng minh $A=B,$ là chúng ta chứng minh $A=B \Leftrightarrow C=D \Rightarrow \ldots X=Y$. Nếu $X=Y$ hiển nhiên đúng hoặc là giả thiết, thì chúngta kết luận $A=B$.

Trình bày lời giải

Biến đổi tương đương:

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}=\frac{3}{4}+\frac{ab}{(a+b)(b+c)}+\frac{bc}{(b+c)(c+a)}+\frac{ca}{(c+a)(a+b)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+b}\left(1-\frac{b}{b+c}\right)+\frac{b}{b+c}\left(1-\frac{c}{c+a}\right)+\frac{c}{c+a}\left(1-\frac{a}{a+b}\right)=\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ac}{(a+b)(b+c)}+\frac{ba}{(b+c)(c+a)}+\frac{cb}{(c+a)(a+b)}=\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow ac(a+c)+ba(b+a)+cb(c+b)=\frac{3}{4}(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow ac(a+c)+ba(b+a)+cb(c+b)=6abc$$

$$\Leftrightarrow ac(a+c)+b(a+b+c)(a=c)=8abc$$

$$\Leftrightarrow (a+c)\left(ac+ab+b^2+bc\right)=8abc$$

$$\Leftrightarrow (a+c)(b+c)(b+a)=8abc$$

Đẳng thức này đúng nên điều phải chứng minh là đúng.

V. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

Ví dụ 5. Với a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn đẳng thức $(a+b)(b+c)(c+a)=8abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}=\frac{3}{4}+\frac{ab}{(a+b)(b+c)}+\frac{bc}{(b+c)(c+a)}+\frac{ca}{(c+a)(a+b)}$$

(Tuyển sinh lớp 10, Trường THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, năm học 2013 - 2014)

Giải

Tìm cách giải. Ví dụ này, trong phần trước chúng ta đã chứng minh bằng phương pháp biến đổi tương đương. Trong phần này, chúng ta sử dụng phương pháp đổi biến để giải. Quan sát phần kết luận, chúng ta nhận thấy hai vế của đẳng thức có phần giống nhau: vế trái là tổng ba phân thức, phần biến vế phải là tích của từng cặp hai phân thức trong ba phân thức ấy, do đó chúng ta nghĩ tới đặt biến phụ: Đặt $x=\frac{a}{a+b};y=\frac{b}{b+c};z=\frac{c}{c+a}$ và chỉ cần chứng minh $x+y+z=\frac{3}{4}+xy+yz+zx$. Do vậy ta có lời giải đẹp sau:

Trình bày lời giải

Đặt $x=\frac{a}{a+b};y=\frac{b}{b+c};z=\frac{c}{c+a}$. Từ giả thiết, suy ra $xyz=\frac{1}{8}$

Ta có:

$$1-x=1-\frac{a}{a+b}=\frac{b}{a+b};1-y=1-\frac{b}{b+c}=\frac{c}{b+c};1-z=1-\frac{c}{c+a}=\frac{a}{c+a};$$

Từ đó suy ra: $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$

$$\Leftrightarrow 2xyz=1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)$$

$$\Leftrightarrow x+y+z=\frac{3}{4}+xy+yz+zx$$

Vậy $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}=\frac{3}{4}+\frac{ab}{(a+b)(b+c)}+\frac{bc}{(b+c)(c+a)}+\frac{ca}{(c+a)(a+b)}$

Điều phải chứng minh.

Ví dụ 6. Cho a, b, c là ba số thực phân biệt. Chứng minh rằng:

$$3+\frac{(2a+b)(2b+c)}{(a-b)(b-c)}+\frac{(2b+c)(2c+a)}{(b-c)(c-a)}+\frac{(2c+a)(2a+b)}{(c-a)(a-b)}=\frac{2a+b}{a-b}+\frac{2b+c}{b-c}+\frac{2c+a}{c-a}$$

Giải

Tìm cách giải. Quan sát phần kết luận, chúng ta nhận thấy hai vế của đẳng thức có phần giống nhau: vế phải là tổng ba phân thức, phần biến vế trái là tích của từng cặp hai phân thức trong ba phân thức ấy. Do đó cũng như ví dụ trước chúng ta nghĩ tới đặt biến phụ: Đặt $x=\frac{2a+b}{a-b};y=\frac{2b+c}{b-c};z=\frac{2c+a}{c-a}$ và chỉ cần chứng minh $3+xy+yz+zx=x+y+z$. Do vậy ta có lời giải đẹp sau:

Trình bày lời giải

Đặt $x=\frac{2a+b}{a-b};y=\frac{2b+c}{b-c};z=\frac{2c+a}{c-a}$

Khi đó $x+1=\frac{3a}{a-2};y+1=\frac{3b}{b-c};z+1=\frac{3c}{c-a}$

Và $x-2=\frac{3b}{a-b};y-2=\frac{3c}{b-c};z-2=\frac{3c}{c-a}$

Từ đó suy ra $(x+1)(y+1)(z+1)=(x-2)(y-2)(z-2)$

Khai triển và rút gọn ta được:

$9+3(xy+yz+zx)=3(x+y+z)\Leftrightarrow 3+xy+yz+zx=x+y+z$

Suy ra: $3+\frac{(2a+b)(2b+c)}{(a-b)(b-c)}+\frac{(2b+c)(2c+a)}{(b-c)(c-a)}+\frac{(2c+a)(2a+b)}{(c-a)(a-b)}=\frac{2a+b}{a-b}+\frac{2b+c}{b-c}+\frac{2c+a}{c-a}$

Điều phải chứng minh

VI. PHÂN TÍCH ĐI LÊN TỪ KẾT LUẬN

Ví dụ 7. Cho ba số a, b, c khác 0 thỏa mãn hệ thức:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1$$

Chứng minh rằng:

a) Trong ba số a, b, c tồn tại một số bằng tổng hai số còn lại.

b) Trong ba phân thức trên, tồn tại hai phân thức bằng 1, một phân thức bằng -1.

Giải

Tìm cách giải. Đọc kỹ phần kết luận câu a, chúng ta nhận thấy phần chứng minh tương đương với: $a=b+c$ hoặc $b=c+a$ hoặc $c=a+b\Leftrightarrow b+c-a=0$ hoặc $c+a-b=0$ hoặc $a+b-c=0\Leftrightarrow (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=0$. Với suy nghĩ ấy, chúng ta biến đổi giả thiết và định hướng biến đổi phân tích đa thức thành nhân tử để đưa về $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=0$.

Trình bày lời giải

a) Từ giả thiết: $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=1$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-1+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}+1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2-c^2}{2ab}+\frac{(b-c)^2-a^2}{2bc}+\frac{(a+c)^2-b^2}{2ac}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b-c)(a-b+c)}{2ab}+\frac{(b-c-a)(b-c+a)}{2bc}+\frac{(a+c-b)(a+c+b)}{2ac}=0$$

$$\Leftrightarrow c(a-b-c)(a-b+c)+a(b-c-a)(b-c+a)+b(a+c-b)(a+c+b)=0$$

$$\Leftrightarrow (a-b+c)\big(c(a-b-c)-a(b-c+a)+b(a+b+c)\big)=0$$

$$\Leftrightarrow (a-b+c)\big(ac-bc-c^2-a(b-c+a)+ab+b^2+bc\big)=0$$

$$\Leftrightarrow (a-b+c)\big(ac+ab+b^2-c^2-a(b-c+a)\big)=0$$

$$\Leftrightarrow (a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b+c=0 \\ a+b-c=0 \\ b+c-a=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+c=b \\ a+b=c \\ b+c=a \end{array}\right.$$

Vậy trong ba số a, b, c có một số bằng tổng hai số còn lại.

b) Không giảm tính tổng quát, giả sử $a=b+c$

- Xét $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(b+c)^2+b^2-c^2}{2(b+c)b}=\frac{2bc+2b^2}{2bc+2b^2}=1$;

- Xét $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-(b+c)^2}{2bc}=\frac{-2bc}{2bc}=-1$;

- Xét $\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=\frac{c^2+(b+c)^2-b^2}{2(b+c).c}=\frac{2c^2+2bc}{2c^2+2bc}=1$

Vậy trong ba phân thức có một phân thức bằng -1; hai phân thức còn lại bằng 1.

VIII. PHƯƠNG PHÁP TÁCH

Ví dụ 8. Biết $a\neq -b, b\neq -c, c\neq -a$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b^2-c^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{c^2-a^2}{(b+c)(b+c)}+\frac{a^2-b^2}{(c+a)(c+b)}=\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{a-b}{a+b}$$

Giải

Tìm cách giải. Quan sát đẳng thức này, chúng ta có thể có ba cách giải:

Cách 1. Biến đổi cả hai vế cùng bằng biểu thức thứ ba. Cách này tuy dài nhưng cho chúng ta kết quả là biểu thức thứ ba rất đẹp.

Cách 2. Sử dụng phương pháp đổi biến. Nhận thấy hai vế có phần mẫu có thể đặt biến phụ được,

Đặt $a+b=z;\ a+c=y;\ b+c=x$, sau đó biến đổi tử thức theo *x*, *y*, *z.* Ta có lời giải hay.

Cách 3. Nhận thấy rằng, vế trái của đẳng thức có thể tách tử thức để đưa mỗi phân thức thành tổng của hai phân thức có mẫu thức trùng với hai trong ba mẫu thức của vế phải. Với cách suy luận như vậy chúng ta có lời giải hay.

Trình bày lời giải

Cách 1. Xét vế trái:

$$\frac{b^2-c^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{c^2-a^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{a^2-b^2}{(c+a)(c+b)}$$

$$=\frac{(b^2-c^2)(b+c)+(c^2-a^2)(c+a)+(a^2-b^2)(a+b)}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

$$=\frac{b^3+b^2c-bc^2-c^3+c^3+ac^2-a^2c-a^3+a^3+a^2b-ab^2-b^3}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

$$=\frac{b^2c-bc^2+ac^2-a^2c+a^2b-ab^2}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

$$=\frac{bc(b-c)-a(b+c)(b-c)+a^2(b-c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

$$=\frac{(b-c)(bc-ab-ac+a^2)}{(a+b)(a+c)(b+c)}=\frac{(b-c)(c-a)(b-a)}{(a+b)(a+c)(b+c)} \qquad (1)$$

Xét vế phải:

$$\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{a-b}{a+b}=\frac{(b-c)(c+a)+(c-a)(b+c)}{(b+c)(c+a)}+\frac{a-b}{a+b}$$

$$=\frac{bc+ab-c^2-ac+bc+c^2-ab-ac}{(b+c)(c+a)}+\frac{a-b}{a+b}$$

$$=\frac{2bc-2ac}{(b+c)(c+a)}+\frac{a-b}{a+b}=\frac{2c(b-a)(a+b)+(a-b)(b+c)(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{(b-a)[2c(a+b)-(b+c)(c+a)]}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{(b-a)(2ac+2bc-bc-ab-c^2-ac)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{(b-a)(ac-ab+bc-c^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{(b-a)(c-a)(b-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{b^2-c^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{c^2-a^2}{(b+c)(b+c)}+\frac{a^2-b^2}{(c+a)(c+b)}=\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{a-b}{a+b}$$

$$=\left(\frac{(b-a)(c-a)(b-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right)$$

Vế trái bằng vế phải điều phải chứng minh.

Cách 2. Đặt $a+b=z; a+c=y; b+c=x$

Đẳng thức được chứng minh tương đương với:

$$\frac{x(z-y)}{yz}+\frac{y(x-z)}{xz}+\frac{z(y-x)}{xy}=\frac{x-z}{y}+\frac{y-x}{z}+\frac{z-y}{x}$$

Biến đổi vế trái ta có:

$$\frac{xz-xy}{yz}+\frac{xy-yz}{xz}+\frac{yz-xz}{xy}$$

$$\frac{x}{y}-\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-\frac{y}{x}+\frac{z}{x}-\frac{z}{y}=\frac{z-y}{x}+\frac{x-z}{y}+\frac{y-z}{x}$$

Vế trái bằng vế phải điều phải chứng minh.

Cách 3. Ta có:

$$\frac{b^2-c^2}{(a+b)(a+c)}=\frac{b^2-a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{a^2-c^2}{(a+b)(a+c)}=\frac{b-a}{a+c}+\frac{a-c}{a+b} \quad (3)$$

Tương tự, ta có:

$$\frac{c^2-a^2}{(b+c)(b+a)}=\frac{c-b}{b+a}+\frac{b-a}{b+c} \ (4)$$

$$\frac{a^2-b^2}{(c+a)(c+b)}=\frac{a-c}{c+b}+\frac{c-b}{c+a} \quad (5)$$

Từ (3) (4) và (5) cộng vế với vế, ta có điều phải chứng minh.

C. Bài tập vận dụng

14.1. Đặt $a+b+c=2p$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}=\frac{abc}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

14.2. Cho $a+b+c=1; a^2+b^2+c^2=1$ và $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$

Chứng minh rằng: $xy+yz+zx=0$

14.3. Cho a, b, c khác 0 thỏa mãn $a+b+c=0$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$

14.4. Cho a, b, c khác 0 và thỏa mãn $a+b+c=0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}=\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}$$

14.5. Cho $\frac{x^2-3y}{x(1-3y)}=\frac{y^2-3x}{y(1-3x)}$ với $x;y\neq 0;x;y\neq\frac{1}{3};x\neq y$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=x+y+\frac{8}{3}$

14.6. Cho $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ac}+\frac{c^2}{c^2+2ab}=1$

b) $\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ac}+\frac{ab}{c^2+2ab}=1$

14.7. Cho ba số a, b, c thỏa mãn $b\neq c;a+b\neq c$ và $a^2+b^2=(a+b-c)^2$

Chứng minh đẳng thức $\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{a-c}{b-c}$

14.8. Chứng minh rằng nếu ba số x, y, z thỏa mãn $x+y+z=2020$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2020}$ thì ít nhất một trong ba số x, y, z phải bằng 2020.

14.9. Cho các số thực a, b, c khác nhau từng đôi một và thỏa mãn điều kiện $a^2-b=b^2-c=c^2-a$. Chứng minh rằng: $(a+b+1)(b+c+1)(c+a+1)=-1$

(Thi học sinh giỏi Toán, Nam Định, năm học 2011 - 2012)

14.10. Cho x, y, z khác không, khác nhau từng đôi một và $zx\neq 1;yz\neq 1$ thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{x^2-yz}{x(1-yz)}=\frac{y^2-xz}{y(1-xz)}$$

Chứng minh rằng $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

14.11. Cho x, y là hai số thực khác 0 sao cho $x+\frac{1}{x};y+\frac{1}{y}$ là các số nguyên. Chứng minh rằng $x^3y^3+\frac{1}{x^3y^3}\in\mathbb{Z}$

14.12. Giả sử x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{2y}{1+y^2}+\frac{3z}{1+z^2}=\frac{xyz(5x+4y+3z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

(Tuyển sinh lớp 10 chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, năm học 2012 - 2013)

14.13. Với mọi n nguyên dương, chứng minh rằng:

$$\frac{3}{1.2}+\frac{7}{2.3}+\frac{13}{3.4}+...+\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}=\frac{n^2+2n}{n+1}$$

14.14. Giả sử x, y là những số thực dương phân biệt thỏa mãn

$\frac{y}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^4}{x^4+y^4}+\frac{8y^8}{x^8-y^8}=4$. Chứng minh rằng: $5y=4x$

(Tuyển sinh lớp 10 chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2014 - 2015)

14.15. Cho a, b, x, y thỏa mãn $\frac{x^4}{a}+\frac{y^4}{b}=\frac{1}{a+b}$ và $x^2+y^2=1$

Chứng minh rằng $\frac{x^{2n}}{a^n}+\frac{y^{2n}}{b^n}=\frac{2}{(a+b)^n}$ với n là số nguyên dương.

14.16. Cho a, b, c đôi một khác nhau và các đa thức:

$$P(x)=a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

$$Q(x)=a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

Chứng minh rằng: $P^2(x)=Q(x)$

14.17. Cho x, y, z là 3 số thực khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$. Chứng minh rằng: $\frac{xy}{z^2}+\frac{zx}{y^2}+\frac{yz}{x^2}=3$

(Thi học sinh giỏi toán 9, tỉnh Trà Vinh, năm học 2008 - 2009)

14.18. Cho $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=x+y+z$$

14.19. Cho a, b, c đôi một khác nhau và khác 0 thỏa mãn $a+b+c=0$

Chứng minh rằng: $\frac{a+b}{a-b}.\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right)=1+\frac{2c^3}{abc}$

Hướng dẫn giải – đáp số

14.1. Xét vế trái:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}=\frac{p-b+p-a}{(p-a)(p-b)}+\frac{p-p+c}{p(p-c)}$$

$$=\frac{c}{(p-a)(p-b)}+\frac{c}{p(p-c)}=\frac{c\left[p(p-c)+(p-a)(p-b)\right]}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\frac{c\left[2p^2-p(a+b+c)+ab\right]}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{abc}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Vế trái bằng vế phải, suy ra điều phải chứng minh.

14.2. Từ $a+b+c=1\Rightarrow (a+b+c)^2=1\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=1$

Mà $a^2=b^2+c^2=1$ nên $ab+bc+ca=0$

Đặt $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$ suy ra $x=ak;y=bk;z=ck$

Xét $xy+yz+zx=abk^2+bck^2+cak^2=k^2(ab+bc+ca)=k^2.0=0$

14.3. Thật vậy, ta có: $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2}{ab}+\frac{2}{bc}+\frac{2}{ca}$

$=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2(a+b+c)}{ab+bc+ca}$ (vì $a+b+c=0$)

$=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

Ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Nếu a, b, c là các số hữu tỉ thì $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ là số hữu tỉ nên bạn có thể chứng minh được bài toán sau: Cho a, b, c là các số hữu tỉ khác 0 thỏa mãn $a+b+c=0$. Chứng minh: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ là bình phương của một số hữu tỉ.

Nếu đặt $a=x-y;b=y-z;c=z-x$ thì ta được bài toán hay và khó sau:

Chứng minh rằng $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}$ là bình phương của một số hữu tỉ.

14.4. Từ $a+b=-c\Rightarrow a^2=b^2+2ab=c^2\Rightarrow a^2+b^2=c^2-2ab$

Suy ra $\frac{a^2+b^2}{a+b}=\frac{c^2-2ab}{-c}=-c+\frac{2ab}{c}$

Tương tự ta có: $\frac{b^2+c^2}{b+c}=-a+\frac{2bc}{a};\frac{c^2+a^2}{c+a}=-a+\frac{2ca}{b}$

Từ đó suy ra vế trái là:

$$VT=-a-b-c+\frac{2ab}{c}+\frac{2bc}{a}+\frac{2ca}{b}=\frac{2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)}{acb}\quad (1)$$

Mặt khác ta có: $(a+b+c)^2=0\Rightarrow a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$

Bình phương hai vế ta được:

$$a^4+b^4+c^4+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)=4a^2b^2+4b^2c^2+4c^2a^2+8abc\left(a+b+c\right)$$

$$\Rightarrow a^4+b^4+c^2=2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

14.5. Từ giả thiết suy ra $\left(x^2-3y\right)\left(y-3xy\right)=\left(y^2-3x\right)\left(x-3xy\right)$

$$\Leftrightarrow x^2y-3x^3y-3y^2+9xy^2=xy^2-3xy^3+9x^2y$$

$$\Leftrightarrow 8xy^2-8x^2y+3xy^3-3x^3y-3y^2+3x^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(y-x\right)\left(8xy+3xy\right)\left(y+x\right)-3\left(x+y\right)=0$$

Do $x\neq y$ nên $8xy+3xy\left(y+x\right)-3\left(y+x\right)=0$

$$\Rightarrow 3\left(y+x\right)=3xy\left(y+x\right)+8xy$$

Chia cả hai vế cho 3x; y khác 0, ta được: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=x+y+\dfrac{8}{3}$

Điều phải chứng minh.

14.6. Từ $a^2+b^2+c^2=\left(a+b+c\right)^2\Rightarrow a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)$

Suy ra $ab+bc+ca=0$

Xét $a^2+2bc=a^2+2bc-ab-bc-ca=a^2-ab-ca+bc=\left(a-b\right)\left(a-c\right)$

Tương tự ta có $b^2+2ac=\left(b-c\right)\left(b-a\right);c^2+2ab=\left(c-a\right)\left(c-b\right)$

a) Xét vế trái ta có:

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ac}+\frac{c^2}{c^2+2ab}=\frac{a^2}{\left(a-b\right)\left(a-c\right)}+\frac{b^2}{\left(b-c\right)\left(b-a\right)}+\frac{c^2}{\left(c-a\right)\left(c-b\right)}$$

$$=\frac{a^2\left(b-c\right)+b^2\left(c-a\right)+c^2\left(a-b\right)}{\left(a-b\right)\left(a-c\right)\left(b-c\right)}=\frac{a^2\left(b-c\right)+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2}{\left(a-b\right)\left(a-c\right)\left(b-c\right)}$$

$$=\frac{a^2\left(b-c\right)+bc\left(b-c\right)-a\left(b+c\right)\left(b-c\right)}{\left(a-b\right)\left(a-c\right)\left(b-c\right)}=\frac{\left(b-c\right)\left(a^2+bc-ab-ac\right)}{\left(a-b\right)\left(a-c\right)\left(b-c\right)}$$

$$=\frac{\left(b-c\right)\left(a-b\right)\left(a-c\right)}{\left(a-b\right)\left(a-c\right)\left(b-c\right)}=1$$

b) Xét vế trái, ta có:

$$\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ac}+\frac{ab}{c^2+2ab}=\frac{bc}{\left(a-b\right)\left(a-c\right)}+\frac{ca}{\left(b-c\right)\left(b-a\right)}+\frac{ab}{\left(c-a\right)\left(c-b\right)}$$

$$\frac{bc\left(b-c\right)+ac\left(c-a\right)+ab\left(a-b\right)}{\left(a-b\right)\left(a-c\right)\left(b-c\right)}=\frac{bc\left(b-c\right)+ac^2-a^2c+a^2b-ab^2}{\left(a-b\right)\left(a-c\right)\left(b-c\right)}$$

$$= \frac{bc(b-c)+a^2(b-c)-a(b-c)(b+c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{(b-c)(bc+a^2-ab-ac)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$= \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 1$$

14.7. Từ $a^2+b^2=(a+b-c)^2 \Rightarrow a^2=(a+b-c)^2-b^2; b^2=(a+b-c)^2-a^2$

Suy ra

$$VT = \frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2} = \frac{(a+b-c)^2-b^2+(a-c)^2}{(a+b-c)^2-a^2+(b-c)^2} = \frac{(a+2b-c)(a-c)+(a-c)^2}{(b+2a-c)(b-c)+(b-c)^2}$$

$$= \frac{(a-c)(2a+2b-2c)}{(b-c)(2a+2b-2c)} = \frac{a-c}{b-c} = VP$$

14.8. Từ giả thiết ta có: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$

$\Leftrightarrow (yz+xz+xy)(x+y+z)=xyz$

$\Leftrightarrow xyz + y^2z + yz^2 + x^2z + xyz + xz^2 + x^2y + xy^2 + xyz = xyz$

$\Leftrightarrow xyz + y^2z + yz^2 + x^2z + xyz + xz^2 + x^2y + xy^2 = 0$

$\Leftrightarrow yz(x+y) + z^2(x+y) + xz(x+y) + xy(x+y) = 0$

$(x+y)(yz + z^2 + xz + xy) = 0 \Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x) = 0$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ y+z=0 \\ x+z=0 \end{array}\right.$

Nếu $x+y=0$ thì từ $x+y+z=2020 \Rightarrow z=2020$

Nếu $y+z=0$ thì từ $x+y+z=2020 \Rightarrow x=2020$

Nếu $x+z=0$ thì từ $x+y+z=2020 \Rightarrow z=2020$

Suy ra điều phải chứng minh.

14.9. Từ $a^2 - b = b^2 - c = a^2 - b^2 = b - c \Rightarrow (a=b)(a-b) = b-c$

$\Rightarrow a+b = \dfrac{b-c}{a-b} \Rightarrow a+b+1 = \dfrac{a-c}{a-b}$ (1)

Tương tự, từ $a^2 - b = c^2 - a \Rightarrow a+c+1 = \dfrac{b-c}{a-c}$ (2)

$b^2 - c = c^2 - a \Rightarrow b+c+1 = \dfrac{b-a}{b-c}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) nhân từng vế ta được: $(a+b+1)(b+c+1)(c+a+1) = -1$

14.10. Từ giả thiết, áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$\dfrac{x^2-yz}{x-xyz} = \dfrac{y^2-xz}{y-xyz} = \dfrac{x^2-yz-y^2+xz}{x-xyz-y+xyz} = \dfrac{(x-y)(x+y+z)}{x-y} = x+y+z$ (1)

$\dfrac{x^2-yz}{x-xyz} = \dfrac{y^2-xz}{y-xyz} = \dfrac{x^2y-y^2z}{xy-xy^2z} = \dfrac{xy^2-x^2z}{xy-x^2yz} = \dfrac{x^2y-y^2z-xy^2+x^2z}{xy-xy^2z-xy+x^2yz}$

$= \dfrac{xy(x-y)+z(x^2-y^2)}{x^2yz-xy^2z} = \dfrac{(x-y)(xy+xz+yz)}{(x-y)xyz}$

$= \dfrac{xy+xz+yz}{xyz} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x+y+z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$

14.11. Từ giả thiết, suy ra $\left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{1}{x}\right) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow xy + \dfrac{1}{xy} \in \mathbb{Z}$

Xét $x^3y^3+\frac{1}{x^3y^3}=\left(xy+\frac{1}{xy}\right)\left(x^2y^2+\frac{1}{x^2y^2}-1\right)=\left(xy+\frac{1}{xy}\right)\left[\left(xy+\frac{1}{xy}\right)^2-3\right]$

Suy ra $x^3y^3+\frac{1}{x^3y^3}\in\mathbb{Z}$, điều phải chứng minh.

14.12. Ta có: $\frac{x}{1+x^2}=\frac{xyz}{yz+x^2yz}=\frac{xyz}{yz+x(x+y+z)}=\frac{xyz}{(x+y)(x+z)}$ (1)

Tương tự: $\frac{2y}{1+y^2}=\frac{2xyz}{(y+z)(y+x)}$ (2)

$\frac{3z}{1+z^2}=\frac{3xyz}{(z+x)(z+y)}$ (3)

Từ (1), (2) và (3); cộng vế với vế, ta có:

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{2y}{1+y^2}+\frac{3z}{1+z^2}=\frac{xyz}{(x+y)(x+z)}+\frac{2xyz}{(y+z)(y+x)}+\frac{3xyz}{(z+x)(z+y)}$$

$$=\frac{xyz\left[y+z+2(z+x)+3(x+y)\right]}{(x+y)(y+z)(z+x)}=\frac{xyz(5x+4y+3z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

Ngoài cách trên, bạn có thể giải bằng cách đặt $a=\frac{1}{x};b=\frac{1}{y};c=\frac{1}{z}$, từ giả thiết, ta có $ab=bc+ca=1$, đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\frac{a}{1+a^2}+\frac{2b}{1+b^2}+\frac{3c}{1+c^2}=\frac{5bc+4ca+3ab}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

Thay $1=ab=bc+ca$ vào các mẫu ở vế trái, rồi biến đổi vế trái ta được điều phải chứng minh.

14.13. Ta có: $\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}=1+\frac{1}{k(k+1)}=1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$

Thay lần lượt $k=1,2,3,...,n$ ta được:

$$VT=\left(1+1-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=n+1-\frac{1}{n+1}=\frac{n^2+2n}{n+1}$$

Nhận xét. Ta cũng có thể biến đổi bài toán như sau: $\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}+\frac{k}{k+1}$

Thay lần lượt $k=1,2,3,...,n$ ta được:

$$VT=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{n}+\frac{n}{n+1}\right)=n+\frac{n}{n+1}=\frac{n^2+2n}{n+1}$$

14.14. Ta có: $4=\frac{y}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^2\left(x^4-y^4\right)+8y^8}{\left(x^4+y^4\right)\left(x^4-y^4\right)}$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^4}{x^4-y^4} \Leftrightarrow 4=\frac{y}{x+y}+\frac{2y^2\left(x^2-y^2\right)+4y^4}{\left(x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow 4=\frac{y}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2-y^2}=\frac{y(x-y)+2y^2}{x^2-y^2}$$

$$\Leftrightarrow 4=\frac{y}{x-y} \Leftrightarrow 4x-4y=y \Leftrightarrow 4x=5y$$

14.15. Từ giả thiết ta có $\frac{x^4}{a}+\frac{y^4}{b}=\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{a+b}$

$$\Leftrightarrow b(a+b)x^4+a(a+b)y^4=\left(x^2+y^2\right)^2 ab$$

$$\Leftrightarrow abx^4+b^2x^4+a^2y^4+aby^4=abx^4+2abx^2y^2+aby^4$$

$$\Leftrightarrow b^2x^4-2abx^2y^2+a^2y^4=0$$

$$\Leftrightarrow \left(bx^2-ay^2\right)^2=0 \Leftrightarrow bx^2-ay^2=0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a}=\frac{y^2}{b}$$

theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{x^2}{a}=\frac{y^2}{b}=\frac{x^2+y^2}{a+b}=\frac{1}{a+b}$

$$\Rightarrow \frac{x^{2n}}{a^n}=\frac{y^{2n}}{b^n}=\frac{1}{(a+b)^n} \Rightarrow \frac{x^{2n}}{a^n}\frac{y^{2n}}{b^n}=\frac{2}{(a+b)^n}$$

14.16. Xét $P(x)=\frac{a(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$

$$P(x)=\frac{a(x-b)(x-c)(c-b)+b(x-a)(x-c)(a-c)+c(x-a)(x-b)(b-a)}{(a-b)(a-c)(c-b)}$$

$$P(x)=\frac{a(x-b)(x-c)(c-b)-b(x-a)(x-c)(c-b)-b(x-a)(x-c)(b-a)+c(x-a)(x-b)(b-a)}{(a-b)(a-c)(c-b)}$$

$$P(x)=\frac{(x-c)(c-b)\left[a(x-b)-b(x-a)\right]-(x-a)(b-a)\left[b(x-c)-c(x-b)\right]}{(a-b)(a-c)(c-b)}$$

$$P(x)=\frac{(x-c)(c-b)(ax-bx)-x(x-a)(b-a)(b-c)}{(a-b)(a-c)(c-b)}$$

$$P(x)=\frac{x(a-b)(c-b)\left[(x-c)-(x-a)\right]}{(a-b)(a-c)(c-b)}=\frac{x(a-b)(c-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)(c-b)}=x$$

* Xét $Q(x)=\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$

$$Q(x)=\frac{a^2(x-b)(x-c)(c-b)+b^2(x-a)(x-c)(a-c)+c^2(x-a)(x-c)(b-a)}{(a-b)(a-c)(c-b)}$$

Xét tử số:

$$a^2(x-b)(x-c)(c-b)+b^2(x-a)(x-c)(a-c)+c^2(x-a)(x-c)(b-a)$$

$$=a^2(x-b)(x-c)(c-b)-b^2(x-a)(x-c)(c-b)-b^2(x-a)(x-c)(b-a)+c^2(x-a)(x-b)(b-a)$$

$$=(x-c)(c-b)\left[a^2(x-b)-b^2(x-a)\right]-(x-a)(b-a)\left[b^2(x-c)-c^2(x-b)\right]$$

$$=(x-c)(c-b)(a-b)(ax+bx-ab)-(x-a)(b-a)(b-c)(bx+cx-bc)$$

$$=(a-b)(c-b)\left[(x-c)(ax+bc-ab)-(x-a)(bc+cx-bc)\right]$$

$$=(a-b)(c-b)\left[ax^2+bx^2-abx-acx-bcx+abc-bx^2-cx^2+bcx+abx+acx-abc\right]$$

$$=(a-b)(c-b)\left[ax^2-cx^2\right]=x^2(a-b)(c-b)(a-c)$$

$$\Rightarrow Q(x)=\frac{x^2(a-b)(c-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)(c-b)}=x^2$$

Vậy suy ra $P^2(x)=Q(x)$

14.17. Từ giả thiết, suy ra $xy+yz+zx=0$. Đặt $xy=a;yz=b;zx=c$, khi đó:

Dễ dàng chứng minh $a^3+b^3+c^3=3abc$

$\frac{xy}{z^2}+\frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2}=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=3$, điều phải chứng minh.

14.18. Từ giả thiết suy ra $\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right).(x+y+z)=2(x+y+z)$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y+z}+x+\frac{y^2}{z+x}+y+\frac{z^2}{x+y}+z=2x+2y+2z$$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=x+y+z$. Điều phải chứng minh.

14.19. Biến đổi vế trái:

$$\frac{a+b}{a-b}.\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}\left(\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right)$$

$$=1+\frac{c}{b-a}\left(\frac{c-b}{a}+\frac{a-c}{b}\right)=1+\frac{c}{b-a}\left(\frac{bc-b^2+a^2-ac}{ab}\right)$$

$$=1+\frac{c}{b-a}.\frac{(a-b)(a+b-c)}{ab}=1+\frac{-c}{a-b}.\frac{(a-b)(-c-c)}{ab}=1+\frac{2c^2}{ab}=1+\frac{2c^3}{abc}$$

Vế trái bằng vế phải, ta có điều phải chứng minh.

Chương III

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Chuyên đề 15. PHƯƠNG TRÌNH. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A. Kiến thức cần nhớ

1. Phương trình:

- Một phương trình một ẩn x có dạng $A(x)=B(x)$, trong đó vế trái $A(x)$ và vế phải $B(x)$ là hai biểu thức của cùng một biến x
- Nghiệm của phương trình: Giá trị của biến thỏa mãn (hay nghiệm đúng) phương trình đã cho
- Giải phương trình: Tìm tập nghiệm của phương trình.
- Hai phương trình tương đương: có cùng một tập nghiệm.

2. Hai quy tắc biến đổi phương trình:

a) Quy tắc chuyển vế: Trong một phương trình ta có thể chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu hạng tử đó.

b) Quy tắc nhân với một số: Trong một phương trình ta có thể nhân (hoặc chia) cả hai vế với (cho) cùng một số khác 0.

- Từ một phương trình, dùng quy tắc chuyển vế hay nhân, ta luôn nhận được một phương trình mới tương đương với phương trình đã cho.

3. Phương trình bậc nhất một ẩn:

- Phương trình có dạng $\mathrm{ax+b=0}$ với a, b là hai số đã cho và $\mathrm{a}\neq 0$
- Phương trình $\mathrm{ax+b=0}$ $(\mathrm{a}\neq 0)$ luôn có nghiệm duy nhất: $\mathrm{x}=-\dfrac{b}{a}$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho các phương trình

$$5x^2-3y+4=3x-8y\,;\ 2,5x-10=0 \text{ và } 4x^2-6x=5x+108$$

Trong các phương trình trên:

a) Phương trình nào là phương trình một ẩn?

b) Phương trình nào là phương trình bậc nhất một ẩn?

c) Số nào trong tập $S=\{-4;0;4\}$ là nghiệm của phương trình một ẩn?

Giải

a) Các phương trình $2,5x-10=0$ và $4x^2-6x=5x+108$ là phương trình một ẩn.

b) Phương trình $2,5x-10=0$ là phương trình bậc nhất một ẩn.

c) Lần lượt thay các giá trị $x=-4;0;4$ vào từng phương trình một ẩn ta có:

- Với $x=4$ thì $2,5.4-10=0$

  nên $x=4$ là nghiệm của phương trình $2,5x-10=0$

* Với $x=-4$ thì $4x^2-6x=4.(-4)^2-6.(-4)=64+24=88$

Và $5x+108=5.(-4)+108=88$

Vậy $x=-4$ là nghiệm của phương trình $4x^2-6x=5x+108$

Nhận xét: Muốn xem một số có phải là nghiệm của phương trình ta xét xem giá trị đó của ẩn thoả mãn (hay nghiệm đúng) phương trình đã cho bằng cách thay vào từng vế của phương trình. Nếu hai vế có cùng giá trị thì số đó là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 2: Cho bốn phương trình:

$2x-6=0$ (1)

$x^2-2x-3=0$ (2)

$(x-1)(x+5)-2x^2=15x-47$ (3)

$(5x-15)(x^2+1)=0$ (4)

a) Chứng tỏ rằng $x=3$ là nghiệm chung của cả bốn phương trình.

b) Chứng tỏ rằng $x=-1$ là nghiệm của phương trình (2) nhưng không là nghiệm của phương trình (1) và (3).

c) Hai phương trình (1) và (2) có tương đương không. Tại sao?

Giải

a) Với $x=3$

- Thay vào phương trình (1) ta có $2.3-6=6-6=0$
- Thay vào phương trình (2) ta có $3^2-2.3-3=9-6-3=0$
- Thay vào phương trình (3) ta có:

Vế trái $(3-1)(3+5)-2.3^2=2.8-2.9=16-18=-2$

Vế phải $15.3-47=45-47=-2$

- Thay vào phương trình (4) ta có $(5.3-15)(3^2+1)=(15-15).10=0.10=0$

$x=3$ nghiệm đúng cả bốn phương trình nên là nghiệm chung của bốn phương trình.

b) Với $x=-1$

- Thay vào phương trình (1) ta có $2.(-1)-6=-2-6=-8\neq 0$
- Thay vào phương trình (2) ta có: $(-1)^2-2.(-1)-3=1+2-3=0$
- Thay vào phương trình (3): $(x-1)(x+5)-2x^2=15x-47$ ta có:

Vế trái $(-1-1)(-1+5)-2.(-1)^2=(-2).4-2=-10$

Vế phải $15.(-1)-47=-15-47=-62$

Vậy $x=-1$ nghiệm đúng phương trình (2) nhưng không nghiệm đúng phương trình (1) và (3) nên là nghiệm của phương trình (2) nhưng không là nghiệm của phương trình (1) và (3).

c) Hai phương trình (1) và (2) không tương đương vì không cùng tập nghiệm.

Nhận xét: Ta thay các số đã cho vào từng vế của phương trình để xét xem các số đó có phải là các nghiệm của phương trình. Từ đó xác định tập nghiệm của các phương trình.

b) $x=-1$ là nghiệm của phương trình (2) vì thay vào làm 2 vế cùng có giá trị 0.

Nhưng không là nghiệm của phương trình (1) và (3) vì khi thay vào 2 phương trình làm hai vế có giá trị khác nhau.

c) Tương tự cách 1.

Ví dụ 3: Cho phương trình với a là tham số: $(a^2+3a-10)x^2=a-2$ (1)

Chứng minh rằng:

a) Với $a=2$ phương trình (1) nghiệm đúng với mọi giá trị của x.

b) Với $a=-5$ phương trình (1) vô nghiệm.

c) Với $a=-5$ phương trình (1) tương đương với phương trình

$$(a+5)x+2016=0 \qquad (2)$$

* *Tìm cách giải:* Với mọi giá trị của ẩn x:

- Nếu hai vế của phương trình luôn có giá trị bằng nhau thì phương trình nghiệm đúng với mọi giá trị của $x(\forall x)$. Tập nghiệm là R.
- Nếu hai vế của phương trình luôn có giá trị khác nhau thì phương trình vô nghiệm. Tập nghiệm là $\varnothing$.
- Hai phương trình cùng vô nghiệm được coi là hai phương trình tương đương.

Giải

a) Với $a=2$ phương trình (1) có dạng $(2^2+3.2-10)x^2=2-2$

hay $0x^2=0$. Phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x$.

b) Với $a=-5$ phương trình (1) có dạng $(25-15-10)x^2=-5-2$

hay $0x^2=-7$. Phương trình vô nghiệm vì hai vế của phương trình luôn có giá trị khác nhau $\forall x$. Tập nghiệm của phương trình là $\varnothing$.

c) Với $a=-5$ phương trình (2) trở thành

$(-5+5)x+2016=0$ hay $0x+2016=0$. Phương trình này cũng vô nghiệm vì vế trái khác 0, $\forall x$. Tập nghiệm của phương trình là $\varnothing$ cùng tập nghiệm với phương trình $0x^2=-7$. Do đó hai phương trình $0x+2016=0$ và $0x^2=-7$ tương đương.

Ví dụ 4: Bằng quy tắc chuyển vế và quy tắc nhân hãy giải các phương trình:

a) $(x+2)+(2x+4)+(3x+6)+...+(50x+100)=-2550$ (1)

b) $|2x-6|=4+3x$ (2)

* *Tìm cách giải:*

Câu a) lưu ý sử dụng công thức tính tổng các số hạng của dãy số cộng (từ số thứ hai, các số đều bằng số liền trước cộng với cùng một số):

Tổng $=\frac{1}{2}$(số hạng đầu + số hạng cuối) x Số số hạng.

Câu b) sử dụng định nghĩa về giá trị tuyệt đối: nếu $|A|=\begin{cases} A \text{ neu } A\ge 0 \\ -A \text{ neu } A<0\end{cases}$.

Sau khi giải xong cần kiểm tra để xác định kết quả tìm được có thoả mãn điều kiện hay không.

Giải

a) (1) $\Leftrightarrow (x+2x+3x+...+50x)+(2+4+6+...+100)=-2550$

$\Leftrightarrow (1+2+3+...+50)x+(2+4+6+...+100)=-2550$

$\Leftrightarrow \frac{(1+50).50}{2}x+\frac{(2+100).50}{2}=-2550 \Leftrightarrow 1275x+2550=-2550$

$\Leftrightarrow 1275x=-2550-2550 \Leftrightarrow 1275x=-5100 \Leftrightarrow x=-5100:1275$

$\Leftrightarrow x=-4$.

b) $|2x-6|=4+3x$

* Nếu $x\ge 3$ thì $2x-6\ge 0 \Rightarrow |2x-6|=2x-6$

Phương trình trở thành $2x-6=4+3x \Leftrightarrow 2x-3x=4+6 \Leftrightarrow x=-10$.(loại vì không thoả mãn điều kiện)

* Nếu $x<3$ thì $2x-6<0 \Rightarrow |2x-6|=-2x+6$

Phương trình trở thành $-2x+6=4+3x \Leftrightarrow -2x-3x=4-6$

$\Leftrightarrow -5x=-2 \Leftrightarrow x=0,4$.

Vậy phương trình có một nghiệm là $x=0,4$.

Ví dụ 5: Xét xem các cặp phương trình sau có tương đương không? Giải thích.

a) $-5x+5=2x-7$ và $-7x+12=0$;

b) $9x-15=12x+27$ và $3x-5=4x+9$;

c) $(5x-15)(x^2+1)=0$ và $3x-20=-11$;

d) $5x-9=11$ và $a(5x-9)=11a$ với a là một số.

* *Tìm cách giải:* Để xét các cặp phương trình có tương đương hay không, ngoài so sánh các tập nghiệm ta còn sử dụng hai quy tắc biến đổi phương trình.

Giải

a) $-5x+5=2x-7 \Leftrightarrow -7x+12=0$ vì theo quy tắc chuyển vế

$-5x+5=2x-7 \Leftrightarrow -5x+5-2x+7=0 \Leftrightarrow -7x+12=0$.

b) $9x-15=12x+27 \Leftrightarrow 3x-5=4x+9$ vì theo quy tắc nhân.

$9x-15=12x+27 \Leftrightarrow (9x-15).\frac{1}{3}=(12x+27).\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x-5=4x+9$.

c) Phương trình $(5x-15)(x^2+1)=0$ có $x^2+1\ne 0\ \forall x$

nên $(5x-15)(x^2+1)=0 \Leftrightarrow 5x-15=0 \Leftrightarrow x=3$.

Phương trình $3x-20=-11 \Leftrightarrow 3x=-11+20 \Leftrightarrow 3x=9 \Leftrightarrow x=3$

Tập nghiệm của phương trình $(5x-15)(x^2+1)=0$ là $S=\{3\}$

Tập nghiệm của phương trình là $3x-20=-11$ là $S=\{3\}$

Hai phương trình có cùng tập nghiệm nên

$$(5x-15)(x^2+1)=0 \Leftrightarrow 3x-20=-11.$$

d) Nếu $a \neq 0$ thì $5x-9=11 \Leftrightarrow a(5x-9)=11a$ theo quy tắc nhân.

Nếu $a=0$ thì $a(5x-9)=11a$ trở thành $0x-0=0$ phương trình này nghiệm đúng với mọi x nên không tương đương với phương trình $5x-9=11$ có một nghiệm duy nhất là $x=4$.

⁕ *Nhận xét:*

b) Để ý rằng nhân hai vế với $\frac{1}{3}$ nghĩa là chia cả hai vế cho 3.

c) Khi áp dụng quy tắc nhân phải lưu ý số nhân (hay chia) phải khác 0.

Ví dụ 6. Cho phương trình $(m^2-9)x^2+2(m-3)x+49=0$ với m là số đã cho.

a) Tìm giá trị của m để phương trình trở thành phương trình bậc nhất có một ẩn số và giải phương trình bậc nhất ẩn vừa tìm được;

b) Tìm giá trị của m để phương trình có nghiệm là $x=2$.

⁕ *Tìm cách giải:* a) Phương trình bậc nhất một ẩn có dạng $ax+b=0,(a \neq 0)$. Để phương trình đã cho trở thành phương trình bậc nhất một ẩn thì hệ số của x^2 là $m^2-9=0$ và hệ số của x là $m-3 \neq 0$.

b) $x=x_0$ là nghiệm của phương trình $A(x)=\mathrm{B(x)}$ nếu $\mathrm{A(x_0)}=B(x_0)$

Giải

a) Ta có $\begin{cases} m^2-9=0 \\ m-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)(m+3)=0 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-3 \end{array}\right. \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m=-3$

Với $m=-3$ phương trình trở thành $(9-9)x^2+2(-3-3)x+49=0$ hay $0x^2-12x+49=0$ hay $-12x+49=0$ là phương trình bậc nhất có một ẩn số.

Nghiệm của phương trình là $x=-\frac{49}{-12}=4\frac{1}{12}$.

b) Để phương trình có nghiệm là $x=2$ ta phải có:

$$(m^2-9).2^2+2(m-3).2+49=0$$

$\Leftrightarrow 4m^2-36+4m-12+49=0 \Leftrightarrow 4m^2+4m+1=0$

$\Leftrightarrow (2m+1)^2=0 \Leftrightarrow 2m+1=0 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$.

Ví dụ 7. Giải phương trình:

$(x-1)+(x-2)+(x-3)+...+(x-2015)=0$.

* *Tìm cách giải:* Vế trái của phương trình là tổng của 2015 các hạng tử, mỗi hạng tử là một hiệu giữa x và một số tự nhiên từ 1 đến 2015. Vậy ta có $2015x$ còn tổng đại số $-1-2-3-...-2015$ ta viết thành $-(1+2+3+...+2015)$ và sử dụng công thức tính tổng của n số tự nhiên khác 0 đầu tiên $S_n=\dfrac{(1+n)n}{2}$ để tính.

Giải

Ta có: $(x-1)+(x-2)+(x-3)+...+(x-2015)=0$

$\Leftrightarrow 2015x-(1+2+3+...+2015)=0$

$\Leftrightarrow 2015x-\dfrac{(1+2015).2015}{2}=0 \Leftrightarrow 2015x-1008.2015=0$

$\Leftrightarrow 2015x=1008.2015 \Leftrightarrow x=1008$.

Ví dụ 8. Giải phương trình:

$$\frac{x-1}{99}+\frac{x-2}{98}+\frac{x-3}{97}+\frac{x-4}{96}=4. \qquad (1)$$

* *Tìm cách giải:* Ở phương trình (1), nếu ta quy đồng mẫu số ở hai vế thì mẫu số chung rất lớn: $99.98.97.96$. Để ý rằng nếu mỗi hạng tử (phân thức) ở vế trái được bớt đi 1 (thêm vàp -1) rồi quy đồng từng cặp thì xuất hiện $(x-100)$ ở tử. Vì vậy ta chuyển 4 từ vế phải sang thành -4 rồi tách $-4=-1-1-1-1$ và ghép mỗi số -1 với một hạng tử. (Cũng có thể coi cộng vào hai vế cùng một số -4).

Giải

a) $(1)\Leftrightarrow\left(\dfrac{x-1}{99}-1\right)+\left(\dfrac{x-2}{98}-1\right)+\left(\dfrac{x-3}{97}-1\right)+\left(\dfrac{x-4}{96}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-100}{99}+\dfrac{x-100}{98}+\dfrac{x-100}{97}+\dfrac{x-100}{96}=0$

$\Leftrightarrow (x-100)\left(\dfrac{1}{99}+\dfrac{1}{98}+\dfrac{1}{97}+\dfrac{1}{96}\right)=0$;

Do $\dfrac{1}{99}+\dfrac{1}{98}+\dfrac{1}{97}+\dfrac{1}{96}\neq 0$. Nên $x-100=0 \Leftrightarrow x=100$.

C. Bài tập vận dụng

1. Phương trình một ẩn

15.1. Chứng tỏ rằng phương trình $8a-x-3=ax-11$ luôn nhận $x=8$ là nghiệm dù a lấy bất kỳ giá trị nào.

Hướng dẫn giải – đáp số

(Vế trái viết tắt là VT; vế phải viết tắt là VP)

Với $x=8$ ta được: $VT=8a-8-3=8a-11; VP=8a-11$

Như vậy $VT=VP, \forall a$. Vậy phương trình luôn nhận $x=8$ là nghiệm dù a lấy bất kỳ giá trị nào.

15.2. Chứng minh rằng mỗi phương trình sau đều nghiệm đúng với mọi giá trị của ẩn:

a) $6(x-1)=6x-6$;

b) $(y-3)^2-3y=9-9y+y^2$;

c) $\dfrac{z^3-10-5z^2+2z}{z^2+2}=z-5$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Hai vế đều bằng $6x-6$;

b) Hai vế đều bằng $9-9y+y^2$;

c) $VT=\dfrac{z^2(z-5)+2(z-5)}{z^2+2}=\dfrac{(z^2+2)(z-5)}{z^2+2}=z-5=VP$

15.3. Chứng minh rằng phương trình $2016x-|2016x|=0$ nghiệm đúng $\forall x \geq 0$.

Hướng dẫn giải – đáp số

$\forall x \geq 0$ thì $|2016x|=2016x$. Khi đó $2016x-|2016x|=0$

$\Leftrightarrow 2016x-2016x=0 \Leftrightarrow 0x=0$ nghiệm đúng $\forall x \geq 0$.

15.4. Chứng minh rằng mỗi phương trình sau vô nghiệm:

a) $5(x+4)=5x+15$;

b) $(2y-3)^2=-\sqrt{5}-y^2$;

c) $2z-5=\dfrac{2z^2+7z-15}{z+5}$;

d) $-t^2-10=3|t-2|$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $\forall x$ VT luôn lớn hơn VP 5 đơn cị;

b) $\forall y \;\; VT \geq 0; VP<0$

c) Khi $z=-5$ vế phải không có nghĩa.

Khi $z \neq -5$

$$VP=\frac{2z^2+7z-15}{z+5}=\frac{2z^2+10z-3z-15}{z+5}=\frac{(2z-3)(z+5)}{z+5}=2z-3=(2z-5)+2;$$

Vế phải luôn lớn hơn vế trái 2 đơn vị.

d) $\forall t$ thì $VT<0$ còn $VP \geq 0$.

15.5. Cho phương trình $(m^2-9m+20)x^2=m-4$ chứng minh rằng:

a) Với $m=4$ phương trình nghiệm đúng $\forall x$;

b) Với $m=5$ phương trình vô nghiệm;

c) Với $m=0$ phương trình vô nghiệm;

d) Với $m=6$ phương trình có hai nghiệm là $x=1$ và $x=-1$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Với $m=4$ phương trình có dạng $0x^2=0$ nghiệm đúng $\forall x$.

b) Với $m=5$ phương trình có dạng $0x^2=1$ vô nghiệm.

c) Với $m=0$ phương trình có dạng $20x^2=-4$ vô nghiệm vì $20x^2\geq 0,\forall x$

d) Với $m=6$ phương trình có dạng $2x^2=2\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$.

2. Phương trình tương đương

15.6. Các cặp phương trình nào sau đây tương đương. Tại sao?

a) $2x-5=0$ và $x=2,5$;

b) $x-6=0$ và $(x-6)(x+6)=0$;

c) $(x-1)^2+4=0$ và $3(x+5)=3x-2$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Tương đương vì cùng tập nghiệm $S=\{2,5\}$

b) Phương trình $(x-6)(x+6)=0$ ngoài nghiệm $x=6$ còn có nghiệm $x=-6$ nên hai phương trình không tương đương vì không cùng tập nghiệm.

c) Tương đương vì cùng vô nghiệm .

15.7. Các cặp phương trình sau đây có tương đương không. Tại sao?

a) $x^3+3x=(x+1)^2$ và $x=-2$;

b) $y+5=0$ và $|y|=5$;

c) $z^2-9=0$ và $|z|=3$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Không tương đương vì $x=-2$ không phải là nghiệm của phương trình $x^3+3x=(x+1)^2$

b) Không tương đương vì $y=5$ là nghiệm $|y|=5$ nhưng không là nghiệm của $y+5=0$.

c) Tương đương vì chúng cùng tập nghiệm $S=\{-3,3\}$.

15.8. Cho ba phương trình: $3x-9=6$ (1); $(x-5)(3x+1)=0$ (2) và $2x^2-10x=0$ (3).

a) Chứng tỏ rằng cả ba phương trình có một nghiệm chung là $x=5$.

b) Các cặp phương trình (1) và (2); (1) và (3); (2) và (3) có tương đương không.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Thay $x=5$ vào cả ba phương trình đều nghiệm đúng.

b) Các cặp phương trình (1) và (2); (1) và (3); (2) và (3) đều không tương đương vì đều không cùng tập nghiệm.

3. Phương trình bậc nhất có một ẩn số

15.9. Cho ba phương trình:

$12,6-3x=0$ (1); $3x+2=7x-10$ (2) và $5-kx=8$ (3). Biết mỗi phương trình nhận một trong ba giá trị là $x=-2; x=3$ và $x=4,2$ làm nghiệm. Tìm k.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $12,6-3x=0 \Leftrightarrow -3x=-12,6 \Leftrightarrow x=-12,6:(-3) \Leftrightarrow x=4,2$ và

$3x+2=7x-10 \Leftrightarrow 3x-7x=-10-2 \Leftrightarrow -4x=-12 \Leftrightarrow x=3$

Như vậy $x=4,2$ là nghiệm của phương trình (1); $x=3$ là nghiệm của phương trình (2). Vậy nghiệm phương trình (3) là $x=-2$.

Do đó $5-k.(-2)=8 \Leftrightarrow 2k=8-5 \Leftrightarrow k=3:2 \Leftrightarrow k=1,5$;

15.10. Cho phương trình $(\mathrm{m}^2-9).2x+3=m$ trong đó m là một số. Giải phương trình trên trong mỗi trường hợp sau:

a) $m=3$; b) $m=-3$; c) $m=5$; d) $m=0$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Với $\mathrm{m}=3$ ta có $0\,\mathrm{x}+3=3$ nghiệm đúng $\forall\,\mathrm{x}$;

b) Với $\mathrm{m}=-3$ ta có $0\,\mathrm{x}+3=-3 \Leftrightarrow 0x=-6$ vô nghiệm;

c) Với $m=5$ ta có $32x+3=5 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{16}$;

d) Với $m=0$ ta có $-18x+3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{18}=\dfrac{1}{6}$.

15.11. Cho phương trình $5x+2n-8=2x-7$ với n là một số.

a) Biết $x=-3$ là nghiệm của phương trình. Tìm n;

b) Giải phương trình trên khi $n=-2017$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $x=-3$ là nghiệm của phương trình nên

$-15+2n-8=-6-7 \Leftrightarrow 2n=15+8-6-7 \Leftrightarrow 2n=10 \Leftrightarrow n=5$.

b) Khi $n=-2017$ ta có phương trình $5x-4034-8=2x-7$.

$\Leftrightarrow 5x-2x=-7+4034+8 \Leftrightarrow 3x=4035 \Leftrightarrow x=1345$.

15.12. Giải các phương trình:

$(x+1)+(2x+3)+(3x+5)+...+(50x+99)=5050$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Vế trái là tổng của 50 hạng tử, mỗi hạng tử chứa trong dấu ( ) là một tổng 2 số hạng, một số hạng chứa x và hệ số của x lần lượt là thứ tự của các hạng tử, số hạng kia lần lượt là các số lẻ từ 1 đến 99. Số các số lẻ cũng là 50 số.

Do đó $(x+1)+(2x+3)+(3x+5)+...+(50x+99)=5050$

$\Leftrightarrow x+2x+3x+...+50x+1+3+5+...+99=5050$.

$\Leftrightarrow x(1+2+3+...+50)+(1+3+5+...+99)=5050$

$\Leftrightarrow \dfrac{(1+50).50}{2}x+\dfrac{(1+99).50}{2}=5050 \Leftrightarrow 1275x+2500=5050$

$\Leftrightarrow 1275x=5050-2500 \Leftrightarrow 1275x=2550 \Leftrightarrow x=2$.

15.13. Cho phương trình $(x+1)+(2x+4)+(3x+7)+...+(nx+61)=420$.

a) Tính n;

b) Giải phương trình.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta biết dãy số cộng (từ số thứ hai, các số đều bằng số liền trước cộng với cùng một số; số được cộng vào ta gọi là khoảng cách) có cách tính số số hạng là: **[|số cuối-số đầu|:khoảng cách]+1**

Vế trái của phương trình sẽ có $1+4+7+...+61$ là tổng các số hạng của dãy số cộng có khoảng cách (hay công sai) là 3. Do đó số số hạng của tổng sẽ là $(61-1):3+1=21$.

Ta có: $(x+1)+(2x+4)+(3x+7)+...+(nx+61)=420$

$\Leftrightarrow (x+2x+3x+...+nx)+(1+4+7+...+61)=420$

a) n chính là số số hạng của tổng $1+4+7+...+61; n=\dfrac{61-1}{3}+1=21$.

b) Phương trình trở thành:

$(1+2+3+...+21)x+(1+4+7+...+61)=420$

$\Leftrightarrow \dfrac{(1+21).21}{2}x+\dfrac{(1+61).21}{2}=420 \Leftrightarrow 231x+651=420$

$\Leftrightarrow 231x=-231 \Leftrightarrow x=-1$.

15.14. Giải các phương trình:

a) $\dfrac{2x+1}{9}+\dfrac{2x+2}{8}+\dfrac{2x+3}{7}+...+\dfrac{2x+8}{2}+\dfrac{2x+9}{1}+9=0$;

b) $\dfrac{x-1}{2015}+\dfrac{x-2}{2014}+\dfrac{x-3}{2013}+...+\dfrac{x-2014}{2}+x=4030$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có $9=\underbrace{1+1+...+1}_{9 \text{ so } 1}$ và ghép mỗi số 1 với một số hạng còn lại được:

$\left(\dfrac{2x+1}{9}+1\right)+\left(\dfrac{x+2}{8}+1\right)+\left(\dfrac{x+3}{7}+1\right)+...+\left(\dfrac{x+9}{1}+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x+10}{9}+\dfrac{2x+10}{8}+\dfrac{2x+10}{7}+...+\dfrac{2x+10}{1}=0$

$\Leftrightarrow (2x+10)\left(\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{7}+...+\dfrac{1}{2}+1\right)=0$

Do $\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{7}+...+\dfrac{1}{2}+1\neq 0$

Nên $2x+10=0 \Leftrightarrow 2x=-10 \Leftrightarrow x=-5$.

b) Biến đổi thành $\dfrac{x-1}{2015}+\dfrac{x-2}{2014}+...+\dfrac{x-2014}{2}+\dfrac{x-2015}{1}-2015=0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{2015}-1\right)+\left(\frac{x-2}{2014}-1\right)+...+\left(\frac{x-2014}{2}-1\right)+\left(\frac{x-2015}{1}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2016}{2015}+\frac{x-2016}{2015}+...+\frac{x-2016}{2}+\frac{x-2016}{1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2016)\left(\frac{1}{2015}+\frac{1}{2014}+...+\frac{1}{2}+1\right)=0;$$

Do $\frac{1}{2015}+\frac{1}{2014}+...+\frac{1}{2}+1\neq 0$. Nên $x-2016=0\Leftrightarrow x=2016$.

4. Bài tập vận dụng tổng hợp

15.15. Cho phương trình $mx(x-5)-(\mathrm{x}-4)(\mathrm{x}+1)=22$ với m là một số.

a) Tìm giá trị của m để phương trình trở thành phương trình bậc nhất một ẩn. Giải phương trình bậc nhất đó;

b) Chứng minh rằng phương trình vô nghiệm khi $\mathrm{m}=0$;

c) Tìm x khi $m=2$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Sau khi khai triển và rút gọn phương trình đã cho ta được phương trình có dạng $ax^2+bx+c=0$. Muốn trở thành phương trình bậc nhất một ẩn ta phải có $a=0$ và $b\neq 0$.

Ta có: $mx(x-5)-(x-4)(x+1)=22$

$\Leftrightarrow mx^2-5mx-x^2-x+4x+4-22=0\Leftrightarrow (m-1)\mathrm{x}^2-(5m-3)x-18=0$

a) Để phương trình trở thành phương trình bậc nhất có một ẩn thì ta phải có:

$$\begin{cases} m-1=0 \\ 5m-3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m\neq \dfrac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m=1$$

Khi $m=1$ phương trình trở thành $(1-1)x^2-(5-3)x-18=0$

$\Leftrightarrow -2x-18=0\Leftrightarrow -2x=18\Leftrightarrow x=-9$.

b) Khi $m=0$ phương trình trở thành: $(0-1)x^2-(0-3)x-18=0$

$$\Leftrightarrow -x^2+3x-18=0\Leftrightarrow x^2-3x+18=0\Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{63}{4}=0$$

Do $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{63}{4}>0\ \forall x$ nên phương trình vô nghiệm.

c) Khi $m=2$ phương trình trở thành $(2-1)x^2-(10-3)x-18=0$

$\Leftrightarrow x^2-7x-18=0\Leftrightarrow x^2-9x+2x-18=0\Leftrightarrow x(x-9)+2(x-9)=0$

$\Leftrightarrow (x-9)(x+2)=0\Leftrightarrow x=9$ hoặc $x=-2$.

15.16. Cho phương trình với x là ẩn số và m là một số (tham số)

$(m^2-25)x^2+10(m+5)x+5025=1+5+9+13+...+197$.

a) Tìm giá trị của m để phương trình trở thành phương trình bậc nhất có một ẩn số và giải phương trình bậc nhất một ẩn vừa tìm được;

b) Tìm nghiệm của phương trình khi $m=10$;

c) Chứng minh phương trình vô nghiệm khi $m=-5$;

d) Chứng minh $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình với mọi giá trị của m.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Phương trình bậc nhất một ẩn có dạng $ax+b=0$. Để phương trình đã cho trở thành phương trình bậc nhất một ẩn thì hệ số của x^2 là $m^2-25=0$ và hệ số của x là $m+5\neq 0$. Ta có $1+5+9+13+...+197$ là tổng các số hạng của dãy số cộng có khoảng cách (hay công sai) là 4.

Ta có số số hạng của tổng ở vế phải sẽ là $(197-1):4+1=50$

và $1+5+9+13+...+197=(1+197).50:2=4950$

Khi ấy phương trình trở thành $(m^2-25)x^2+10(m+5)x+5025=4950$

$\Leftrightarrow (m^2-25)x^2+10(m+5)x+75=0$

Ta có: $\begin{cases} m^2-25=0 \\ m+5\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-5)(m+5)=0 \\ m\neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow m=5$

Với $m=5$ phương trình trở thành $\Leftrightarrow (25-25)x^2+10(5+5)x+75=0$

hay $0x^2+100x+75=0$ hay $100x+75=0$ là phương trình bậc nhất có một ẩn số. Nghiệm của phương trình là $x=-\dfrac{75}{100}=-0,75$.

b) $x=n$ là nghiệm của phương trình $A(x)=B(x)$ nếu $A(n)=B(\mathrm{n})$

Do đó khi $\mathrm{m}=10$ ta có $(10^2-25)x^2+10(10+5)x+75=0$

$\Leftrightarrow 75x^2+150x+75=0 \Leftrightarrow 75(x^2+2x+1)=0$

$\Leftrightarrow 75(x+1)^2=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

c) Khi $m=-5$ phương trình trở thành $0x^2+0x+75=0$. Vô nghiệm vì $\forall x$ giá trị VT là 75 còn VP là 0.

d) Khi $x=1$ ta có $(m^2-25).1^2+10(m+5).1+75=0$

$VT=m^2-25+10m+50+75=m^2+10m+25+75=(m+5)^2+75>0$. $\forall m$. $VT\neq VP$ nên $x=1$ không là nghiệm của phương trình $\forall m$

15.17. Giải phương trình $|x-1|=2x+3$.

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9 huyện Thường Tín, Hà Tây, năm học 2002 – 2003)

Hướng dẫn giải – đáp số

Với $x\geq 1$ phương trình thành $x-1=2x-3 \Leftrightarrow x=2$ (thoả mãn ĐK)

Với $x<1$ phương trình thành $1-x=2x-3 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$ (loại).

Nghiệm của phương trình là $x=2$.

15.18. Giải phương trình $\frac{x+1}{99}+\frac{x+2}{98}=\frac{x+3}{97}+\frac{x+4}{96}$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên tỉnh Vĩnh Phúc, năm học 2013 – 2014)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\frac{x+1}{99}+\frac{x+2}{98}=\frac{x+3}{97}+\frac{x+4}{96} \Leftrightarrow \frac{x+1}{99}+1+\frac{x+2}{98}+1=\frac{x+3}{97}+1+\frac{x+4}{96}+1$$

$$\Leftrightarrow (x+100)\left(\frac{1}{99}+\frac{1}{98}-\frac{1}{97}-\frac{1}{96}\right)=0 \Leftrightarrow x=100 \text{ do } \left(\frac{1}{99}+\frac{1}{98}-\frac{1}{97}-\frac{1}{96}\right)\neq 0$$

15.19. Giải phương trình $\frac{2-x}{2013}-1=\frac{1-x}{2014}-\frac{x}{2015}$.

(Thi kiểm tra chất lượng học sinh giỏi lớp 8 huyện Thường Tín – Hà Nội, năm học 2014 -2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\frac{2-x}{2013}-1=\frac{1-x}{2014}-\frac{x}{2015} \Leftrightarrow \frac{2-x}{2013}+1=\frac{1-x}{2014}+1-\left(\frac{x}{2015}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow (2015-x)\left(\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015}\right)=0 \Leftrightarrow x=2015$$

Chương III

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Chuyên đề 16. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA ĐƯỢC VỀ DẠNG

$\mathbf{ax+b=0}$ (hay $\mathbf{ax=-b}$)

A. Kiến thức cần nhớ

a) Phương trình không chứa mẫu số

- Thực hiện phép tính để bỏ dấu ngoặc.

- Chuyển các hạng tử chứa ẩn sang một vế, các hằng số sang vế kia.

- Thu gọn và giải phương trình nhận được.

b) Phương trình chứa mẫu số bằng số

Trước hết phải quy đồng mẫu số rồi nhân hai vế với mẫu chung để khử mẫu số rồi thực hiện như a)

Chú ý: Không nhất thiết phải thực hiện theo các bước như trên. Tuỳ theo phương trình mà vận dụng linh hoạt các bước đó.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1:

a) $\dfrac{x^2+2}{3}+\dfrac{3(2x-1)}{4}-6=\dfrac{(2x+3)(x-2)}{6}-\dfrac{5+8x}{12}$ (1)

b) $3x-\dfrac{\dfrac{x+5}{2}-\dfrac{x}{4}}{6}=\dfrac{4x-\dfrac{5-2x}{3}}{4}-2x+1$ (2)

Giải

a) $(1)\Leftrightarrow 4(x^2+2)+9(2x-1)-72=2(2x^2-x-6)-5-8x$

$\Leftrightarrow 4x^2+8+18x-9-72=4x^2-2x-12-5-8x$

$\Leftrightarrow 18x+8x+2x=-12-5-8+9+72$

$\Leftrightarrow 28x=56\Leftrightarrow x=2$.

Nhận xét:

- Ở câu a) ta có thể bỏ qua bước quy đồng mẫu hai vế mà viết thẳng (1)

$\Leftrightarrow 4(x^2+2)+9(2x-1)-72=2(2x^2-x-6)-5-8x$ vì thực chất nhân hai vế của phương trình (3) với 12 được ngay kết quả này.

- Sau khi khai triển hai vế có chứa hai hạng tử bằng nhau $4x^2$, ta có thể bỏ đi (thực chất khi chuyển vế được hai hạng tử đối nhau nên tổng bằng 0).

b) $(2)\Leftrightarrow 3x-\dfrac{2x+10-x}{24}=\dfrac{12x-5+2x}{12}-2x+1$

$\Leftrightarrow 72x-2x-10+x=24x-10+4x-48x+24$

$\Leftrightarrow 72x-2x+x-24x-4x+48x=24 \Leftrightarrow 91x=24 \Leftrightarrow x=\frac{24}{91}$.

Nhận xét: Câu b) sau khi nhân hai vế với 24, hai vế xuất hiện hai số bằng nhau là -10 ta có thể bỏ đi (vì khi chuyển vế $-10+10=0$).

Ví dụ 2: Tìm các giá trị của y sao cho biểu thức A và B sau đây có giá trị bằng nhau:

$$A=\frac{y-2}{2}-\frac{9-5y}{8}-\frac{2-y}{6}+\frac{3(5y-9)}{4};\ B=\frac{45-25y}{8}+\frac{2-y}{3}-\frac{5y-9}{2}.$$

Tìm cách giải: Để tìm các giá trị của y sao cho hai biểu thức A và B có giá trị bằng nhau ta quy về việc giải phương trình $A=B$.

Giải

Để $A=B$ ta phải có:

$$\frac{y-2}{2}-\frac{9-5y}{8}-\frac{2-y}{6}+\frac{3(5y-9)}{4}=\frac{45-25y}{8}+\frac{2-y}{3}-\frac{5y-9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y-2}{2}+\frac{y-2}{6}+\frac{y-2}{3}=\frac{5(9-5y)}{8}+\frac{9-5y}{2}+\frac{9-5y}{8}+\frac{3(9-5y)}{4}$$

$$\Leftrightarrow (y-2)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)=(9-5y)\left(\frac{5}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{3}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow (y-2)\left(\frac{3}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\right)=(9-5y)\left(\frac{5}{8}+\frac{4}{8}+\frac{1}{8}+\frac{6}{8}\right)$$

$$\Leftrightarrow (y-2).1=(9-5y).2$$

$$\Leftrightarrow y-2=18-10y$$

$$\Leftrightarrow 11y=20 \Leftrightarrow y=\frac{20}{11}.$$

Nhận xét: Ta không quy đồng mẫu các phân thức mà biến đổi bài toán một cách linh hoạt, vừa đổi dấu phân thức sau đó chuyển vế để xuất hiện các nhân tử chung là $(y-2)$ và $(9-5y)$.

Ví dụ 3: Giải phương trình sau với m là hằng số (tham số):

$$m(mx-2)=x(3m+4)+2 \qquad (1)$$

Giải

$(1) \Leftrightarrow m^2x-2m=3mx+4x+2$

$\Leftrightarrow m^2x-3mx-4x=2m+2 \Leftrightarrow x(m^2-3m-4)=2(m+1)$

$\Leftrightarrow x(m+1)(m-4)=2(m+1)$.

- Nếu $m\neq -1$ và $m\neq 4$ thì $x=\frac{2}{m-4}$;
- Nếu $m=4$ phương trình có dạng $0x=10$. Vô nghiệm;
- Nếu $m=-1$ phương trình có dạng $0x=0$. Phương trình nghiệm đúng với mọi giá trị của x.

Ví dụ 4: Giải phương trình sau với b là tham số:

$$\frac{x-2+b}{b+3}+\frac{x-b}{b-3}=\frac{-4b-x}{9-b^2} \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện $b \neq \pm 3$

Phương trình (1) biến đổi thành $(x-2+b)(b-3)+(x-b)(b+3)=x+4b$

$\Leftrightarrow xb-3x-2b+6+b^2-3b+xb+3x-b^2-3b=x+4b$

$\Leftrightarrow 2xb-x=12b-6 \Leftrightarrow (2b-1)x=6(2b-1)$.

* Nếu $b \neq 0,5$ và $b \neq \pm 3$ thì $x=6$;

* Nếu $b=0,5$ thì phương trình trở thành $0x=0$. Phương trình nghiệm đúng $\forall x$.

Ví dụ 5: Giải phương trình:

$$\frac{4029x+2014+2.2015}{2014.2015}=\frac{4037x-2.2019-3.2018}{2018.2019}$$

* *Tìm cách giải:* Ở phương trình trên nếu quy đồng mẫu thức hai vế thì mẫu thức chung quá lớn. Ta nhận xét $4029x=2014x+2015x; 4037x=2018x+2019x$ do đó ta biến đổi và giải phương trình như sau:

Giải

$$\frac{4029x+2014+2.2015}{2015.2014}=\frac{2014x+2014+2015x+2.2015}{2015.2014}$$

$$=\frac{2014(x+1)+2015(x+2)}{2014.2015}=\frac{x+1}{2015}+\frac{x+2}{2014}$$

$$\frac{4037x-2.2019-3.2018}{2018.2019}=\frac{2019x-2.2019+2018x-3.2018}{2018.2019}$$

$$=\frac{2019(x-2)+2018(x-3)}{2018.2019}=\frac{x-2}{2018}+\frac{x-3}{2019}$$

Phương trình trở thành

$$\frac{x+1}{2015}+\frac{x+2}{2014}=\frac{x-2}{2018}+\frac{x-3}{2019} \Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{2015}+1\right)+\left(\frac{x+2}{2014}+1\right)=\left(\frac{x-2}{2018}+1\right)+\left(\frac{x-3}{2019}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2016}{2015}+\frac{x+2016}{2014}-\frac{x+2016}{2018}+\frac{x+2016}{2019}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2016)\left(\frac{1}{2015}+\frac{1}{2014}-\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}\right)=0$$

Do $\frac{1}{2015}+\frac{1}{2014}-\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019} \neq 0$.

Do đó $x+2016=0$

Vậy $x=-2016$

Ví dụ 6: Tìm giá trị của a để:

a) Phương trình $(2x-3)(1+3a)-5(x+6)=25(x+3)(2-x)+5(a-2)+50$. (1) có nghiệm $x=-3$;

b) Phương trình $(x-a)(x+5)-4ax+17=(x+a)(x-6)-3x$ (2) có nghiệm gấp năm nghiệm của phương trình:

$$3x(x-5)-4(x-4)=3(x-1)(x+3) \qquad (3)$$

Tìm cách giải: a) Để x_0 là nghiệm của phương trình $A(x)=B(x)$ ta phải có $A(x_0)=B(x_0)$. Do đó thay $x=-3$ vào hai vế của phương trình (1) ta được một phương trình mới với ẩn là a.

b) Trước hết giải phương trình (3) tìm nghiệm x_0. Nghiệm của phương trình (2) sẽ bằng $5x_0$.

Giải

a) Để $x=-3$ nghiệm của phương trình (1) ta phải có:

$(-6-3)(1+3a)-5(-3+6)=25(-3+3)(2+3)+5(a-2)+50$

$\Leftrightarrow -9(1+3a)-15=5(a-2)+50 \Leftrightarrow -9-27a-15=5a-10+50$

$\Leftrightarrow -27a-5a=-10+50+9+15 \Leftrightarrow -32a=64 \Leftrightarrow a=-2$.

b) Giải phương trình (3): $3x(x-5)-4(x-4)=3(x-1)(x+3)$

$\Leftrightarrow 3x^2-15x-4x+16=3x^2+9x-3x-9$

$\Leftrightarrow -15x-4x-9x+3x=-9-16 \Leftrightarrow -25x=-25 \Leftrightarrow x=1$

Nghiệm của phương trình (2) gấp 5 nghiệm của phương trình (3) nghĩa là phương trình (2) có nghiệm là 5. Thay $x=5$ vào hai vế phương trình (2) ta có:

$(5-a)(5+5)-20a+17=(5+a)(5-6)-15$

$\Leftrightarrow 50-10a-20a+17=-5-a-15$

$\Leftrightarrow -10a-20a+a=-5-15-50-17 \Leftrightarrow -29a=-87 \Leftrightarrow a=3$

Ví dụ 7: Giải các phương trình:

a) $\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)...\left(1-\dfrac{1}{9^2}\right)(18x-45)=2(x-1)+97$. (1)

b) $\left(\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{3.4}+...+\dfrac{1}{199.200}\right).2017x=\dfrac{2016}{101}+\dfrac{2016}{102}+...+\dfrac{2016}{199}+\dfrac{2016}{200}$. (2)

c) $\left(\dfrac{10}{1.3}+\dfrac{10}{3.5}+...+\dfrac{10}{9.11}\right).2,2x-[0,8.(7,5-2,5x)]:0,25=12$. (3)

Tìm cách giải: Các phương trình trong ví dụ 7 xuất hiện các dãy tổng hoặc tích các phân số hoặc các biểu thức chứa phân số có quy luật. Trước hết ta tính toán để rút gọn các dãy đó, rồi thay kết quả vào phương trình để giải tiếp. Trong câu b) và c) ta gặp các phân số dạng $\dfrac{m}{a.(a+m)}$ với a; m là các số và $a \neq -m$.

Ta phải biến đổi như sau:

$$\frac{m}{a.(a+m)}=\frac{(a+m)-a}{a(a+m)}=\frac{(a+m)}{a(a+m)}-\frac{a}{a(a+m)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+m}.$$

(phương pháp biến đổi trên thường gọi là: Sai phân hữu hạn)

Giải

a) Ta có $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)...\left(1-\frac{1}{9^2}\right)=\frac{2^2-1}{2^2}.\frac{3^2-1}{3^2}.\frac{4^2-1}{4^2}.....\frac{9^2-1}{9^2}$

$=\frac{1.3}{2.2}.\frac{2.4}{3.3}.\frac{3.5}{4.4}.....\frac{8.10}{9.9}=\frac{1.2.3.....8}{2.3.4.....9}.\frac{3.4.5.....10}{2.3.4....9}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$

Do đó phương trình trở thành:

$\Leftrightarrow \frac{5}{9}(18x-45)=2(x-1)+97 \Leftrightarrow 10x-25=2x-2+97$

$\Leftrightarrow 10x-2x=-2+97+25 \Leftrightarrow 8x=120 \Leftrightarrow x=15$

b) Xét $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{199.200}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}$

$=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{199}+\frac{1}{200}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{200}\right)$

$=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{199}+\frac{1}{200}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{100}\right)=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+...+\frac{1}{199}+\frac{1}{200}$

Vậy phương trình trở thành

$\left(\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+...+\frac{1}{199}+\frac{1}{200}\right).2017x=2016.\left(\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+...+\frac{1}{199}+\frac{1}{200}\right)$

$\Leftrightarrow 2017x=2016 \Leftrightarrow x=\frac{2016}{2017}.$

c) Ta có: $\frac{10}{1.3}+\frac{10}{3.5}+...+\frac{10}{9.11}=5.\left(\frac{2}{1.3}+\frac{2}{3.5}+...+\frac{2}{9.11}\right)$

$=5.\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)=5.\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{50}{11}.$

Khi ấy phương trình trở thành $\frac{50}{11}.2,2x-[0,8.(7,5-2,5)]:0,25=12$

$\Leftrightarrow 10x-(6-2x).4=12 \Leftrightarrow 10x-24+8x=12$

$\Leftrightarrow 18x=36$

$\Leftrightarrow x=2.$

Ví dụ 8: Với z là ẩn; m, n, p là các số và $m\neq -n; n\neq -p; p\neq -m$.

Giải phương trình $\frac{z-mn}{m+n}+\frac{z-np}{n+p}+\frac{z-pm}{p+m}=m+n+p$.

Tìm cách giải: Nếu chuyển vế và ghép $-m;-n$ và $-p$ với các phân thức mà mẫu không chứa các số đó và quy đồng từng cặp một sẽ xuất hiện nhân tử chung $(z-mn-mp-np)$. Từ đó cách giải như sau:

Giải

$$\text{PT} \Leftrightarrow \frac{z-mn}{m+n}-p+\frac{z-np}{n+p}-m+\frac{z-pm}{p+m}-n=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{z-mn-pm-pn}{m+n}+\frac{z-np-mn-mp}{n+p}+\frac{z-pm-np-nm}{p+m}=0$$

$$\Leftrightarrow (z-mn-mp-np)\left(\frac{1}{m+n}+\frac{1}{n+p}+\frac{1}{p+m}\right)=0$$

Do đó:

\+ Nếu $\frac{1}{m+n}+\frac{1}{n+p}+\frac{1}{p+m}\neq 0$ thì $z=mn+mp+np$

\+ Nếu $\frac{1}{m+n}+\frac{1}{n+p}+\frac{1}{p+m}=0$ thì phương trình trở thành $0z=0$ nghiệm đúng với mọi z.

C. Bài tập vận dụng

16.1. Giải các phương trình:

a) $\frac{3-x}{6}+2x=\frac{4x+3}{3}-\frac{2(x-1)}{5}$;

b) $0,5(x+2)^2(x-1)-\frac{1}{6}x(x^2-2)=\frac{1}{3}(x+2)^3-\frac{(x-2)^2+(x-2)(x+2)}{4}$;

c) $\frac{3+x}{3}-\frac{x-\frac{x-1}{3}}{2}=\frac{\frac{5-3x}{5}+x}{2}+\frac{x-3}{5}$;

d) $\frac{x-3}{6}+\frac{\frac{2x-4}{3}-2\left(3x+\frac{x-1}{5}\right)}{4}=\frac{2+5x-\frac{8-3x}{4}}{3}-3x$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Các phương trình đều chứa các mẫu số. Do đó ta thực hiện việc quy đồng mẫu số các phân số rồi khử mẫu số (thực chất là ta nhân hai vế của phương trình với cùng mẫu số chung). Riêng c) và d) ta phải quy đồng riêng các phân thức trên các tử rồi đưa về thành một phân thức sau đó mới quy đồng mẫu hai vế. Ở câu b) Ta có: $0,5$ là $\frac{1}{2}$;

Trong quá trình giải có thể rút gọn các hạng tử đồng dạng từng vế sau đó mới chuyển vế, và bỏ những hạng tử giống nhau ở hai vế nếu có.

* Đáp số: a) $x=1$; b) $x=-1$; c) $x=2\frac{1}{3}$; d) $x=-4$

16.2. Tìm y nếu:

a) $\left(2\frac{1}{2}-3\frac{1}{2}+4\frac{1}{5}-5\frac{1}{6}\right).\frac{15}{16}y=\frac{1}{2}(3-8y)+7\frac{1}{2}$;

b) $\dfrac{8,54+0,46-4,5:0,25}{2,68+\dfrac{8}{25}}+\dfrac{y}{4}=\left(\dfrac{y}{2}-\dfrac{y}{4}\right).0,5+3$;

c) $-\frac{15}{6}y:\left(3,25-5\frac{1}{6}-2\frac{1}{3}+3\right)-4=20-\frac{32}{31}y.\left(0,5+0,25+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Các phương trình đều chứa các biểu thức về phân số và số thập phân. Trước hết ta rút gọn các biểu thức đó, tuỳ theo các biểu thức ta biến đổi thành phân số hay số thập phân thuận tiện cho việc tính.

a) Ta có $\left(2\frac{1}{3}-3\frac{1}{2}+4\frac{1}{5}-5\frac{1}{6}\right).\frac{15}{16}=\frac{70-105+126-155}{30}.\frac{15}{16}=\frac{-64}{30}.\frac{15}{16}=-2$

Do đó phương trình trở thành $-2y=\frac{1}{2}(3-8y)+7\frac{1}{2}$. Giải được $y=4,5$.

b) Biến đổi $\dfrac{8.45+0,46-4,5:0,25}{2,68+\dfrac{8}{25}}=\dfrac{8,54+0,46-4,5:0,25}{2,68+0,32}=\dfrac{9-18}{3}=-3$

Phương trình thành $-3+\frac{y}{4}=\left(\frac{y}{2}-\frac{y}{4}\right).\frac{1}{2}+3$

hoặc $-3+0,25y=(0,5-0,25y)0,5+3$. Giải được $x=48$.

c) $3,25-5\frac{1}{6}-2\frac{1}{3}+3=\frac{13}{4}-\frac{31}{6}-\frac{7}{3}+3=\frac{39-62-28+36}{12}=-\frac{15}{12}$

Và $0,5+0,25+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$

Do đó phương trình trở thành $-\frac{15}{6}y:\left(-\frac{15}{12}\right)-4=20-\frac{32}{31}y.\frac{31}{32}$

Giải được $y=8$.

16.3. Cho phương trình với z là ẩn, m là một số (tham số)

$(z-2)^2-(z+5m-2)+(z+3)^2=2(z^2-m+1)+8(m-5)z+28$

a) Tìm giá trị của m để phương trình có nghiệm là $z=3$;

b) Giải phương trình theo tham số m.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Để phương trình có nghiệm là $z=3$ phải có:

$(3-2)^2-(3+5m-2)+(3+3)^3=2(3^2-m+1)+8(m-5).3+28$

Giải phương trình tìm được $m=4$.

b) $(z-2)^2-(z+5m-2)+(z+3)^2=2(z^2-m+1)+8(m-5)z+28$

Khai triển rút gọn, chuyển vế ta được phương trình $(41-8m)z = 3m+15$

Nếu $m \neq \frac{41}{8}$ thì phương trình có nghiệm $z = \frac{3m+15}{41-8m}$.

Nếu $m = \frac{41}{8}$ ta có: $0z = 3.\frac{41}{8}+15$ vô nghiệm vì $3\frac{41}{8}+15 = \frac{253}{8} \neq 0$.

16.4. Tìm giá trị của m để phương trình

$$x^2 - \frac{2m-3x}{2} + 5(x+m) = x^3 - 6x^2 + 31$$

có nghiệm bằng $\frac{1}{4}$ nghiệm của phương trình $(x-2)(x+3) = x(x-1)+10$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Giải phương trình $(x-2)(x+3) = x(x-1)+10$ được nghiệm $x = 8$.

Vậy phương trình $x^2 - \frac{2m-3x}{2} + 5(x+m) = x^3 - 6x^2 + 31$ có nghiệm $x = 2$

Nghĩa là $2^2 - \frac{2m-3.2}{2} + 5(2+m) = 2^3 - 6.2^2 + 31$. Giải tìm được $m = -\frac{1}{2}$.

16.5. Giải các phương trình:

a) $3x\left(\frac{1}{294}+\frac{1}{295}\right) - \left(\frac{6}{294}+\frac{5}{295}\right) = \frac{3x-294}{6} + \frac{3x-295}{5}$;

b) $x\left(\frac{1}{126}+\frac{1}{125}+\frac{1}{124}\right) + 5 + \frac{74}{126} + \frac{75}{125} + \frac{76}{124} = -\frac{122(77+x)+123(78+x)}{122.123}$;

c) $\frac{99x-50.49-51.50}{50.49} + \frac{25(x-52)+48(x-175)}{48.25} = 0$;

d) $\frac{4x-350}{15} + \frac{4x-100}{25} + \frac{4x-95}{35} = \frac{110.55+145.45-400x}{45.55}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta biến đổi phương trình đã cho thành phương trình

$$\frac{3x-5}{295} + \frac{3x-6}{294} = \frac{3x-294}{6} + \frac{3x-295}{5}$$

$\Leftrightarrow (3x-300)\left(\frac{1}{295}+\frac{1}{294}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right) = 0$. Tìm được $x = 100$.

b) Biến đổi thành: $\frac{74+x}{126} + \frac{75+x}{125} + \frac{76+x}{124} + \frac{77+x}{123} + \frac{78+x}{122} + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{74+x}{126}+1\right) + \left(\frac{75+x}{125}+1\right) + \left(\frac{76+x}{124}+1\right) + \left(\frac{77+x}{123}\right) + \left(\frac{78+x}{122}+1\right) = 0$$

$\Leftrightarrow (200+x)\left(\frac{1}{126}+\frac{1}{125}+\frac{1}{124}+\frac{1}{123}+\frac{1}{122}\right) = 0$. Tìm được $x = -200$.

c) Biến đổi phương trình thành: $\frac{x-50}{50}+\frac{x-51}{49}+\frac{x-52}{48}+\frac{x-175}{25}=0$

Ở vế trái của phương trình, nếu ta thêm (-1) vào mỗi phân thức trong ba phân thức đầu và thêm $(+3)$ vào phân thức thứ tư rồi quy đồng mẫu từng cặp ta làm xuất hiện 4 phân thức đều có tử là $x-100$. Việc thêm vào không làm thay đổi giá trị của vế trái vì $-1-1-1+3=0$.

Ta có $\left(\frac{x-50}{50}-1\right)+\left(\frac{x-51}{49}-1\right)+\left(\frac{x-52}{48}-1\right)+\left(\frac{x-175}{25}+3\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-100)\left(\frac{1}{50}+\frac{1}{49}+\frac{1}{48}+\frac{1}{25}\right)=0$. Tìm được $x=100$.

d) Biến đổi thành: $\frac{4x-350}{15}+\frac{4x-100}{25}+\frac{4x-95}{35}+\frac{4x-110}{45}+\frac{4x-145}{55}=0$

Ở vế trái của phương trình, phân thức thứ nhất nếu ta thêm 10, phân tử thứ hai thêm -4; phân thức thứ ba thêm -3; phân thức thứ tư thêm -2; phân thức thứ năm thêm -1 thì giá trị vế trái không đổi vì $10-4-3-2-1=0$; ta quy đồng mẫu từng cặp làm xuất hiện 4 phân thức đều có tử là $4x-200$. Từ đó, ta có:

$$\left(\frac{4x-350}{15}+10\right)+\left(\frac{4x-100}{25}-4\right)+\left(\frac{4x-95}{35}-3\right)+\left(\frac{4x-110}{45}-2\right)+\left(\frac{4x-145}{55}-1\right)=0$$

$\Leftrightarrow (4x-200)\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{25}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{55}\right)=0$. Tìm được $x=50$.

Nhận xét: Ở các bài toán thuộc dạng trên các phương trình sau khi biến đổi ta không quy đồng tất cả các mẫu số, hướng giải là làm xuất hiện các tử thức giống nhau bằng cách thêm, bớt vào mỗi phân thức các số thích hợp thành một cặp, sao cho giá trị các vế của phương trình không thay đổi. Bằng cách quy đồng mẫu từng cặp ta sẽ làm xuất hiện các tử thức giống nhau. Khi đặt thành công tử chung, nhân tử còn lại sẽ là tổng, hiệu các phân số mà tính khác không của nó là điều dễ nhận ra. Từ đó ta tìm được nghiệm của phương trình.

16.6. Giải các phương trìn:

a) $\frac{x-m}{m+2}+\frac{x-2}{m-2}=\frac{4m}{4-m^2}$ với m là hằng số (tham số);

b) $\frac{x-m}{np}+\frac{x-n}{pm}+\frac{x-p}{mn}=\frac{2}{m}+\frac{2}{n}+\frac{2}{p}$.

với m, n, p là các hằng số và $m.n.p \neq 0$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Đây là các phương trình chứa tham số. Cần đặc biệt lưu ý điều kiện xác định của các phương trình và sau khi biến đổi về dạng $ax+b=0$ hoặc $ax=-b,(a \neq 0)$, phải biện luận các giá trị của a để xác định nghiệm của phương trình.

a) ĐKXĐ: $m \neq \pm 2$. Biến đổi phương trình thành

$(x-m)(m-2)+(x-2)(m+2)=-4m \Leftrightarrow 2mx=(m-2)^2$

Nếu $m \neq 0$ và $m \neq \pm 2$ thì $x=\dfrac{(m-2)^2}{2m}$.

Nếu $m=0$ thì phương trình trở thành $0x=4$, phương trình vô nghiệm.

b) Do $m.n.p \neq 0$ nên $m \neq 0; n \neq 0; p \neq 0$.

Nhân hai vế của phương với $mnp \neq 0$ ta được phương trình tương đương:

$m(x-m)+n(x-n)+p(x-p)=2mn+2np+2pm$

$\Leftrightarrow x(\mathrm{m+n+p})-(\mathrm{m}^2+n^2+p^2+2mn+2mp+2np)=0$

$\Leftrightarrow x(m+n+p)-(m+n+p)^2=0 \Leftrightarrow (m+n+p)[x-(m+n+p)]=0$

* Nếu $m+n+p \neq 0$ thì nghiệm của phương trình là $x=m+n+p$

* Nếu $m+n+p=0$ thì phương trình thành $0(x-0)=0$, vô số nghiệm.

16.7. Giải các phương trình với y là ẩn số; m, n, p là hằng số và $m.n.p \neq 0$

a) $\dfrac{y-m}{n-3}+\dfrac{y-n}{m-3}=3-\dfrac{y+3}{m+n}$;

b) $\dfrac{3y-n-p}{m}+\dfrac{3y-p-m}{n}+\dfrac{3y-m-n}{p}=3$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta nhận thấy $\dfrac{y-m}{n-3}-1=\dfrac{y-m-n+3}{n-3}$. Làm tương tự như vậy với các phân thức còn lại cũng làm xuất hiện tử thức $(y-m-n+3)$.

Do đó ta chuyển vế rồi viết $-3=-1-1-1$ và ghép mỗi số với một phân thức.

ĐKXĐ $m \neq 3; n \neq 3; \mathrm{m} \neq -n$

Biến đổi phương trình thành $\left(\dfrac{y-m}{n-3}-1\right)+\left(\dfrac{y-n}{m-3}-1\right)+\left(\dfrac{y+3}{m+n}-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{y-m-n+3}{n-3}+\frac{y-n-m+3}{m-3}+\frac{y+3-m-m}{m+n}=0$$

$$\Leftrightarrow (y-m-n+3)\left(\frac{1}{n-3}+\frac{1}{m-3}+\frac{1}{m+n}\right)=0$$

Nếu $\dfrac{1}{n-3}+\dfrac{1}{m-3}+\dfrac{1}{m+n} \neq 0$ thì phương trình có nghiệm $y=m+n-3$.

Nếu $\dfrac{1}{n-3}+\dfrac{1}{m-3}+\dfrac{1}{m+n}=0$ phương trình trở thành $0(y-m-n+2)=0$ thỏa mãn với mọi y.

Phương trình vô số nghiệm với $m \neq 3; n \neq 3; \mathrm{m} \neq -n$.

b) Tương tự a). Biến đổi phương trình về dạng:

$$\left(\frac{3y-n-p}{m}-1\right)+\left(\frac{3y-p-m}{n}-1\right)+\left(\frac{3y-m-n}{p}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow [3y-(m+n+n)]\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)=0$$

Nếu $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\neq 0 \Rightarrow y=\frac{1}{3}(m+n+p)$.

Nếu $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=0 \Rightarrow$ phương trình trở thành $0y=0$ có vô số nghiệm với $m.n.p\neq 0$;

16.8. Giải phương trình :

a) $\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)...\left(\frac{1}{100}-1\right).200x-18070=\left(\frac{x}{100}-1\right)(1+2+3+...+200)$;

b) $\frac{(x+3)^2-(x-5)(x+5)}{2}=\left(\frac{7}{9}+1\right)\left(\frac{7}{20}+1\right)\left(\frac{7}{33}+1\right)...\left(\frac{7}{105}+1\right).\frac{15}{256}(x+2)$;

c) $92x-\left(\frac{0,6+\frac{3}{7}-\frac{3}{11}}{2+\frac{10}{7}-\frac{10}{11}}+\frac{\frac{14}{3}-21}{\frac{20}{3}-30}\right)=\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)2016x-8(x-3)$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Các phương trình đều chứa những biểu thức về số, phân số, số thập phân, dãy số, phân số. Ta cần rút gọn chúng rồi thay vào phương trình để giải. Khi rút gọn cần lưu ý các quy luật của chúng.

a) $\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{4}-1\right)...\left(\frac{1}{100}-1\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)...\left(-\frac{99}{100}\right)=-\frac{1}{100}$

và $1+2+3+...+199+200=\frac{(1+200).200}{2}=20100$

Phương trình trở thành $-\frac{1}{100}.200x-18070=\left(\frac{x}{100}-1\right).20100$

Giải phương trình tìm được $x=10$.

b) $\left(\frac{7}{9}+1\right)\left(\frac{7}{20}+1\right)\left(\frac{7}{33}+1\right)...\left(\frac{7}{105}+1\right)=\frac{16}{9}.\frac{27}{20}.\frac{40}{33}.....\frac{112}{105}=\frac{2.8}{1.9}.\frac{3.9}{2.10}.\frac{4.10}{3.11}.....\frac{8.14}{7.15}$

$=\frac{2.3.4.....8}{1.2.3.....7}.\frac{8.9.10.....14}{9.10.11.....15}=\frac{64}{15}$. Phương trình trở thành:

$\frac{(x+3)^2-(x-5)(x+5)}{2}=\frac{64}{15}.\frac{15}{256}(x+2)$. Giải được $x=-6$

c) $\frac{0,6+\frac{3}{7}-\frac{3}{11}}{2+\frac{10}{7}-\frac{10}{11}}+\frac{\frac{14}{3}-21}{\frac{20}{3}-30}=\frac{3\left(0,2+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)}{10\left(0,2+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)}+\frac{14\left(\frac{1}{3}-1,5\right)}{20\left(\frac{1}{3}-1,5\right)}=\frac{3}{10}+\frac{7}{10}=1$

$\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1+2+3-6}{12}=0$

Phương trình trở thành $92x-1=-8(x-3)$. Giải được $x=0,25$.

16.9. Tìm z nếu:

a) $\left(\frac{9}{1.10}+\frac{9}{10.19}+\frac{9}{19.28}+...+\frac{9}{82.91}\right)+\frac{183}{91}+3(z-1)=\frac{6z+5}{4}+\frac{5z-6}{5}$;

b) $\left(10+\frac{6060}{1212}+\frac{6060}{2020}+...+\frac{6060}{9090}\right).(z-1)=76-\frac{2015.2016+2017}{2016.2017-2015}.z$;

c) $\left(\frac{2017}{1.11}+\frac{2017}{2.12}+...+\frac{2017}{100.110}\right).\frac{z}{10}=\frac{2018}{1.101}+\frac{2018}{2.102}+...+\frac{2018}{10.110}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Đây là một bài khó, hay, đòi hỏi linh hoạt và sáng tạo. Trong cả ba câu ta gặp các phân số dạng $\frac{m}{a.(\mathrm{a}+\mathrm{m})}$ với a; m là các số và $a\neq -m$. Ta biến đổi $\frac{m}{a.(a+m)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+m}$ để rút gọn các biểu thức.

a) $\frac{9}{1.10}+\frac{9}{10.19}+\frac{9}{19.28}+...+\frac{9}{82.91}=1-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{19}+\frac{1}{19}-\frac{1}{28}-...+\frac{1}{82}-\frac{1}{91}$

$=1-\frac{1}{91}=\frac{90}{91}$. Do đó ta có $\frac{90}{91}+\frac{183}{91}+3(z-1)=\frac{6z+5}{4}+\frac{5z-6}{5}$.

Giải phương trình tìm được $z=0,1$

b) Ta có: $10+\frac{6060}{1212}+\frac{6060}{2020}+...+\frac{6060}{9090}=60\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+...+\frac{1}{90}\right)$

$=60\left(\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+...+\frac{1}{9.10}\right)$

$=60\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=60.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\right)=24$

và $\frac{2015.2016+2017}{2016.2017-2015}=\frac{2015.2016+2017}{2016.(2015+2)-2015}=\frac{2015.2016+2017}{2016.2015+2017}=1$

Phương trình trở thành $24(z-1)=76-z$. Tìm được $z=4$.

c) Đặt $A=\frac{2017}{1.11}+\frac{2017}{2.12}+...+\frac{2017}{100.100}=\frac{2017}{10}\left(\frac{10}{1.11}+\frac{10}{2.12}+...+\frac{10}{100.1000}\right)$

$=\frac{2017}{10}\left(\frac{11-1}{1.11}+\frac{12-2}{2.12}+...+\frac{110-100}{100.110}\right)=\frac{2017}{10}\left(1-\frac{1}{11}+\frac{1}{2}-\frac{1}{12}+...+\frac{1}{100}-\frac{1}{110}\right)$

$=\frac{2017}{10}\left[\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{100}\right)-\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{110}\right)\right]$

Xét $M=\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{100}\right)-\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{110}\right)$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+...+\frac{1}{110}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{100}\right)-\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{100}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+...+\frac{1}{110}\right)$$ nên $A=\frac{2017}{10}.M$

Xét $B=\frac{2018}{1.101}+\frac{2018}{2.102}+...+\frac{2018}{10.110}=\frac{2018}{100}\left(\frac{101-1}{1.101}+\frac{102-2}{2.102}+...+\frac{110-10}{10.110}\right)$

$$=\frac{2018}{100}\left(1-\frac{1}{101}+\frac{1}{2}-\frac{1}{102}+...+\frac{1}{10}-\frac{1}{110}\right)$$

$$=\frac{2018}{100}\left[\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+...+\frac{1}{110}\right)\right]=\frac{2018}{100}.M$$

Do đó ta có: $\frac{2017}{10}.M.\frac{z}{10}=\frac{2018}{100}.M$

$$\Rightarrow z=\frac{2018}{100}:\frac{2017}{100}=\frac{2018}{100}.\frac{100}{2017}=\frac{2018}{2017}$$

16.10. Giải phương trình với ẩn t; a, b, c là các số; $a\neq 0; b\neq 0$ và $c\neq 0$

$$\left(\frac{t-a}{bc}-\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{t-b}{ca}-\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{t-a}{ab}-\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta thấy nếu chuyển vế rồi ghép $-\frac{1}{c}$ với $\left(\frac{t-a}{bc}-\frac{1}{b}\right)$ được

$\left(\frac{t-a}{bc}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)=\frac{t-a-c-b}{bc}$. Tương tự ta có cách giải: Chuyển vế và viết phương trình đã cho thành

$$\left(\frac{t-a}{bc}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{t-b}{ca}-\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{t-c}{ab}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{t-a-c-b}{bc}+\frac{t-b-a-c}{ca}+\frac{t-c-b-a}{ab}=0$$

$$\Leftrightarrow (t-a-b-c)\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\right)=0$$

Nếu $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\neq 0$ phương trình có nghiệm $t=a+b+c$

Nếu $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=0$ phương trình nghiệm đúng với mọi t.

16.11. Giải phương trình $12-3(x-2)^2=(x+2)(1-3x)+2x$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 huyện Thường Tín – Hà Tây, năm học 1996 – 1997)

Hướng dẫn giải – đáp số

$12-3(x-2)^2=(x+2)(1-3x)+2x$

$\Leftrightarrow 12-3(x^2-4x+4)=(-3x^2-5x+2)+2x \Leftrightarrow 15x=2 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{15}$

16.12. Cho $169(157-77x)^2+100(201-100x)^2=26(77x-157)(1000x-2010)$.

Tính giá trị của x.

(Đề thi Olympic Toán Singapore (SMO) năm 2010)

Hướng dẫn giải – đáp số

Biến đổi phương trình thành:

$(2041-1001x)^2+(2010-1000x)^2=2(1001x-2041)(1000x-2010)$

$\Leftrightarrow (1001x-2041)^2+(1000x-2010)^2-2(1001x-2041)(1000x-2010)=0$

Đặt $1001x-2041=a$ và $1000x-2010=b$, ta có:

$a^2-2ab+b^2=0 \Leftrightarrow (a-b)^2=0 \Leftrightarrow a=b$

Hay $1001x-2041=1000x-2010 \Leftrightarrow x=31$.

16.13. Tìm ba số tự nhiên liên tiếp biết tổng 3 tích của từng cặp số khác nhau của chúng là 1727.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT năng khiếu ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, năm học 2012 – 2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi số tự nhiên nhỏ nhất là x. Ta giải phương trình:

$x(x+1)+x(x+2)+(x+1)(x+2)=1727 \Leftrightarrow x^2+2x=575$

$\Leftrightarrow (x+1)^2=576 \Leftrightarrow x=23$

Vậy 3 số tự nhiên cần tìm là $23;24;25$.

Chuyên đề 17. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

A. Kiến thức cần nhớ

Phương trình tích

- Phương trình có dạng: $A\left(x\right).B\left(x\right)=0$; trong đó A(x), B(x) là các đa thức của biến x.
- Phương pháp chung: Muốn giải phương trình $A\left(x\right).B\left(x\right)=0$ ta giải hai phương trình A(x) = 0 và

B(x) = 0, rồi lấy tất cả các nghiệm thu được.

A(x). B(x) = 0 A(x) = 0 hoặc B(x) = 0.

Mở rộng: A(x). B(x)….M(x) = 0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(x)=0 \\ B(x)=0 \\ \ldots \\ M(x)=0 \end{array}\right.$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1**:** Giải các phương trình:

a) $\left(5,5-11x\right)\left[\dfrac{2\left(2x-3\right)}{5}-\dfrac{4x-5}{4}\right]=0 \qquad \left(1\right)$

b) $\left(x^2-4\right)\left(x^2+3\right)\left(9-4x\right)=\left(x^4-x^2-12\right)\left(2x+3\right) \qquad \left(2\right)$

c) $\left(2x-1\right)\left(x+7\right)-x=\left(x+4\right)\left(x-4\right)+\left(2x-3\right)^2 \qquad \left(3\right)$

Tìm cách giải:

a) Phương trình có dạng: $A\left(x\right).B\left(x\right)=0$

b) Ta thấy $x^4-x^2-12=\left(x^2-4\right)\left(x^2+3\right)$ .Hai vế có nhân tử chung. Chuyển vế, đặt nhân tử chung sẽ đưa về được về dạng phương trình tích

a) Chuyển vế và biến đổi phương trình đã cho thành phương trình tích.

Giải

a) $\left(1\right)\Leftrightarrow 5,5-11x=0$ hoặc $\left[\dfrac{2\left(2x-3\right)}{5}-\dfrac{4x-5}{4}\right]=0$

Với $5,5-11x=0\Leftrightarrow -11x=-5,5\Leftrightarrow x=0,5$

Với $\dfrac{2\left(2x-3\right)}{5}-\dfrac{4x-5}{4}=0\Leftrightarrow 8\left(2x-3\right)-5\left(4x-5\right)=0$

$\Leftrightarrow 16x - 24 - 20x + 25 = 0 \Leftrightarrow -4x = -1 \Leftrightarrow x = 0,25$

Tập nghiệm của phương trình là: $S = \{0,25; 0,5\}$

b) Ta có: $x^4 - x^2 - 12 = x^2 - 4x^2 + 3x^2 - 12 = x^2(x^2 - 4) + 3(x^2 - 4)$

$= (x^2 - 4)(x^2 + 3)$

Do đó $(2) \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 3)(9 - 4x) - (x^2 - 4)(x^2 + 3)(2x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 3)(9 - 4x - 2x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x + 2)(x^2 + 3)(6 - 6x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ x + 2 = 0 \\ 6 - 6x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \text{(do } x^2 + 3 > 0 \forall x) \\ x = 1 \end{array}\right.$ (do $x^2 + 3 > 0 \forall x$)

Tập nghiệm của phương trình là: $S = \{-2; 1; 2\}$

c) $(3) \Leftrightarrow (2x - 1)(x + 7) - x - (x + 4)(x - 4) - (2x - 3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 14x - x - 7 - x - x^2 + 16 - 4x^2 + 12x - 9 = 0$

$\Leftrightarrow -3x^2 + 24x = 0 \Leftrightarrow x(24 - 3x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 24 - 3x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ -3x = -24 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 8 \end{array}\right.$

Tập nghiệm của phương trình là: $S = \{0; 8\}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình: $x^3 - 5x^2 + 11x - 15 = 0$ (1)

Tìm cách giải: Ta phải phân tích đa thức ở vế trái thành nhân tử. Thông thường với đa thức bậc cao (≥ 2) ta sử dụng hệ quả của định lý Bézout (Bézout (1730 - 1783) nhà toán học Pháp): *Đa thức f(x) chia hết cho (x - a) khi và chỉ khi f(a) = 0.* Nói cách khác: *Nếu f(a) = 0 thì f(x) phải chứa nhân tử (x - a).* Ở ví dụ này ta thay x bằng một trong các ước số của 15 ta thấy: $f(3) = 3^3 - 5.3^2 + 11.3 - 15 = 0$. Như vậy $x^3 - 5x^2 + 11x - 15$ chứa một nhân tử là $(x - 3)$.Từ đó có cách giải sau:

Giải

$(1) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 2x^2 + 6x + 5x - 15 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x - 3) - 2x(x - 3) + 5(x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x^2-2x+5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ x^2-2x+5=0 \end{array}\right.$

Nếu $x-3=0$ thì $x=3$. Phương trình $x^2-2x+5=0$ vô nghiệm vì $x^2-2x+5=(x-1)^2+4>0, \forall x$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{3\}$.

* *Nhận xét:* Thực chất phương pháp làm trên là nhẩm nghiệm để tìm ra một nhân tử chung, từ đó phân tích được ve trái thành nhân tử để giải phương trình tích.

Ví dụ 3. Giải phương trình: $y^2(y^4-29y^2+244)=576$ (1)

* *Tìm cách giải:* Chuyển vế rồi thay $y^2=4$ ta thấy vế trái nhận giá trị 0. Do đó vế trái nhận (y^2-4) là nhân tử chung. Từ đó ta có cách giải sau:

Giải

$(1) \Leftrightarrow y^6-29y^4+244y^2-576=0$

$\Leftrightarrow y^6-4y^4-25y^4+100y^2+144y^2-576=0$

$\Leftrightarrow y^4(y^2-4)-25y^2(y^2-4)+144(y^2-4)=0$

$\Leftrightarrow (y^2-4)(y^4-25y^2+144)=0 \Leftrightarrow (y^2-4)(y^4-9y^2-16y^2+144)=0$

$\Leftrightarrow (y^2-4)\left[y^2(y^2-9)-16(y^2-9)\right]=0 \Leftrightarrow (y^2-4)(y^2-9)(y^2-16)=0$

$\Leftrightarrow (y-4)(y-3)(y-2)(y+2)(y+3)(y+4)=0$

Vậy phương trình (1) có 6 nghiệm là: $y=\pm 2; y=\pm 3; y=\pm 4$

Tập nghiệm của phương trình là $S=\{-4;-3;-2;2;3;4\}$

* *Nhận xét.* Sau khi phân tích vế trái (VT) thành $(y^2-4)(y^4-25y^2+144)$ ta dùng phương, pháp tách và thêm bớt, hoặc dùng phương pháp nhẩm nghiệm như trên để phân tích
  $y^4-25y^2+144=(y^2-9)(y^2-16)$.

Ví dụ 4. Giải phương trình $(z+3)^3-(z+1)^3=98$ (1)

Giải

$(1) \Leftrightarrow z^3+9z^2+27z+27-z^3-3z^2-3z-1=98$

$\Leftrightarrow 6z^2+24z-72=0 \Leftrightarrow z^2+4z-12=0$

$\Leftrightarrow z^2+6z-2z-12=0 \Leftrightarrow (z+6)(z-2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z+6=0 \\ z-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-6 \\ z=2 \end{array}\right.$

Tập nghiệm của phương trình (1) là $S=\{-6;2\}$.

* *Nhận xét* :Ta có cách giải khác:

Do z + 2 là trung bình cộng của z + 1 và z + 3 nên ta đặt z + 2 = y phương trình trở thành

$(y+1)^3-(y-1)^3=98$.

$\Leftrightarrow y^3+3y^2+3y+1-y^3+3y^2-3y+1=98 \Leftrightarrow 6y^2=96$

$\Leftrightarrow y^2=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=4 \\ y=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z+2=4 \\ z+2=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2 \\ z=-6 \end{array}\right.$

Nghiệm của phương trình là $z=-6; z=2$.

***Ví dụ* 5.** Tìm năm số tự nhiên liên tiếp, biết rằng tổng các lập phương của bốn số đầu hơn lập phương của số thứ năm là 8.

* *Tìm cách giải:* Hai số tự nhiên liên tiếp hơn kém nhau 1 đơn vị.

Nếu gọi số nhỏ nhất là a thì các sổ tiếp theo là (a + 1); (a + 2); (a + 3); (a + 4) phân tích .

Dựa theo đầu bài ta lập phương trình

Giải

Gọi 5 số tự nhiên liên tiếp đó là a; a + 1; a + 2; a + 3; a + 4; a + 5.

Ta có: $a^3+(a+1)^3+(a+2)^3+(a+3)^3-(a+4)^3=8$

$\Leftrightarrow a^3+a^3+3a^2+3a+1+a^3+6a^2+12a+8+a^3+9a^2+27a+27-a^3-12a^2-48a-64=8$

$\Leftrightarrow 3a^3+6a^2-6a-36=0$

$\Leftrightarrow 3a^3-6a^2+12a^2-24a+18a-36=0$

$\Leftrightarrow 3a^2(a-2)+12a(a-2)+18(a-2)=0$

$\Leftrightarrow (a-2)(3a^2+12a+18)=0 \Leftrightarrow 3(a-2)(a^2+4a+6)=0$

Do $a^2+4a+6=(a+2)^2+2>0 \forall$a nên $a-2=0$ hay $a=2$.

Vậy năm số tự nhiên liên tiếp cần tìm là 2; 3; 4; 5; 6.

Ví dụ 6. Giải phương trình: $(2x^2+x-6)+3(2x^2+x-3)-9=0$.

* *Tìm cách giải:* Ta thấy $2x^2+x-6$ và $2x^2+x-3$ có các hạng tử chứa ẩn giống nhau. Phần số khác nhau. Ta đặt ẩn phụ.

Giải

Đặt $2x^2+x-6=y$ thì $2x^2+x-3=y+3$ phương trình trở thành

$$y^2+3(y+3)-9=0 \Leftrightarrow y(y+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2+x-6=0 \\ 2x^2+x-3=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (2x-3)(x+2)=0 & (*) \\ (2x+3)(x-1)=0 & (**) \end{array}\right.$$

Từ $(*) \Rightarrow x=1,5; x=-2$

Từ $(**) \Rightarrow x=-1,5; x=1$.

Tập nghiệm của phương trình là $\Leftrightarrow S=\{-2;-1,5;1;1,5\}$.

Ví dụ 7. Giải phương trình:

$$(x-2)(x-3)(x-5)(x-6)=31(x^2-8x+12)+128 \qquad (1)$$

* *Tìm cách giải:* Xét vế trái nếu nhân nhân tử thứ nhất với nhân tử thứ tư và nhân tử thứ hai nhân nhân tử thứ 3 ta có $(x^2-8x+12)(x^2-8x+15)$. Mỗi nhân tử là một đa thức có cùng hệ số của x^2 và của x.

Phương trình trở thành $(x^2-8x+12)(x^2-8x+15)=31(x^2-8x+12)+128$

Do đó ta dùng phương pháp đặt ẩn phụ.

Giải

$$(x-2)(x-3)(x-5)(x-6)=31(x^2-8x+12)+128$$

$$\Leftrightarrow (x^2-8x+12)(x^2-8x+15)=31(x^2-8x+12)+128 \qquad (2)$$

Đặt $x^2-8x+12=y$ thì $x^2-8x+15=y+3$

Khi ấy phương trình (2) trở thành $y(y+3)=31y+128$

$$\Leftrightarrow y^2+3y-31y-128=0 \Leftrightarrow y^2+4y-32y-128=0$$

$$\Leftrightarrow y(y+4)-32(y+4)=0 \Leftrightarrow (y+4)(y-32)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y+4=0 \\ y-32=0 \end{array}\right.$$

Với $y+4=0 \Leftrightarrow x^2-8x+16=0 \Leftrightarrow (x-4)^2=0 \Leftrightarrow x=4$

Với $y-32=0 \Leftrightarrow x^2-8x-20=0 \Leftrightarrow x^2-10x+2x-20=0$

$\Leftrightarrow (x-10)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=10$ hoặc $x=-2$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{-2;4;10\}$

Ví dụ 8. Giải các phương trình:

a) $3y^3-7y^2-7y+3=0$ (1)

b) $2y^4-9y^3+14y^2-9y+2=0$ (2)

* *Tìm cách giải:* Khi giải phương trình ta có thể gặp phương trình có hệ số của các hạng tử đối xứng nhau. Ta gọi các phương trình ấy là phương trình đối xứng. Nếu phương trình đối xứng bậc lẻ thì bao giờ cũng có một nghiệm là -1 . Nếu phương trình đối xứng bậc chẵn thì ta giải bằng cách chia hai vế cho bình phương của ẩn $(\neq 0)$ và đặt sau đó đặt ẩn phụ.

Giải

a) $(1) \Leftrightarrow 3y^3+3y^2-10y^2-10y+3y+3=0$

$\Leftrightarrow 3y^2(y+1)-10y(y+1)+3(y+1)=0$

$\Leftrightarrow (y+1)(3y^2-10y+3)=0 \Leftrightarrow (y+1)(3y-1)(y-3)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y+1=0 \\ 3y-1=0 \\ y-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=\dfrac{1}{3} \\ y=3 \end{array}\right.$ .Vậy tập nghiêm của (8) là $S=\left\{-1;\dfrac{1}{3};3\right\}$

b) Với y = 0 từ (2) ta có $VT=2\neq 0$ nên y = 0 không là nghiệm của (2)

Do y = 0 không phải là nghiệm của phương trình $\Rightarrow y\neq 0$. Do đó chia hai vế của phương trình cho y^2 ta có $(2) \Leftrightarrow 2\left(y^2+\dfrac{1}{y^2}\right)-9\left(y+\dfrac{1}{y}\right)+14=0$

Đặt $t=y+\dfrac{1}{y}$ thì $t^2-2=y^2+\dfrac{1}{y^2}$. Do đó ta có $2(t^2-2)-9t+14=0$

$\Leftrightarrow 2t^2-9t+10=0 \Leftrightarrow 2t^2-5t-4t+10=0 \Leftrightarrow (t-2)(2t-5)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-2=0 \\ 2t-5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2-2y+1=0 \\ 2y^2+2-5y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (y-1)^2=0 \\ (y-2)(2y-1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình (2) là $S=\left\{\frac{1}{2};1;2\right\}$

* *Nhận xét:* Trong phương trình đối xứng, nếu a là nghiệm thì $\frac{1}{a}$ cũng là nghiệm,

Ví dụ 9. Giải phương trình $\left(4x+7\right)\left(4x+5\right)\left(x+1\right)\left(2x+1\right)=9$.

* *Tìm cách giải:* Ta thấy nếu vế trái nhân 4 vào nhân tử thứ ba, nhân 2 vào nhân tử thứ tư thì cả bốn nhân tử đều là các đa thức mà hệ số của X đều là 4. Vế phải nhân với 8 để được phương trình mới tương đương. Sau đó nếu nhân $\left(4x+7\right)$ với $\left(4x+2\right);\left(4x+5\right)$ với $\left(4x+4\right)$ ta thấy kết quả xuất hiện các hạng tử giống nhau $16x^2+36x$ nên có thể đặt ẩn phụ để giải.

Giải

Ta có: $\left(4x+7\right)\left(4x+5\right)\left(x+1\right)\left(2x+1\right)=9$

$\Leftrightarrow\left(4x+7\right)\left(4x+5\right)\left(4x+4\right)\left(4x+2\right)=72$

$\Leftrightarrow\left(16x^2+36x+14\right)\left(16x^2+36x+20\right)=72$

Đặt $16x^2+36x+17=y$, ta có:

$\left(y-3\right)\left(y+3\right)=72\Leftrightarrow y^2-9=72\Leftrightarrow y^2=81\Leftrightarrow y=\pm9$

Với $16x^2+36x+17=9\Leftrightarrow 4x^2+9x+2=0\Leftrightarrow 4x^2+8x+x+2=0$

$\Leftrightarrow 4x^2+8x+x+2=0\Leftrightarrow 4x\left(x+2\right)+\left(x+2\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x+2\right)\left(4x+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+2=0\\4x+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-0,25\end{array}\right.$

Với $16x^2+36x+17=-9\Leftrightarrow 16x^2+36x+26=0$ vô nghiệm vì

$16x^2+36x+26=\left(4x+\frac{9}{2}\right)^2+\frac{23}{4}>0,\forall x$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-2;-0,25\right\}$

C. Bài tập vận dụng

17.1. Giải các phương trình:

a) $\left(8x+3\right)\left(2x-1\right)=\left(2x-1\right)^2$

b) $\dfrac{\left(x^2-4\right)\left(5x+2\right)}{3}=\left(x^2-4\right)\left(2x+\dfrac{3}{4}\right)$

c) $\left(x-5\right)^2-36=0$

d) $\left(4x-3\right)^2-4\left(x+3\right)^2=0$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $x=-\dfrac{2}{3}, x=\dfrac{1}{2}$

b) Chuyển vế, đặt $\left(x^2-4\right)$ làm nhân tử chung. Tập nghiệm: $S=\left\{-2;-0,25;2\right\}$

c) $x=-1, x=11$

d) $x=-0,5, x=4,5$

17.2. Giải các phương trình (với y là ẩn số):

a) $y^3-3y-2=0$

b) $y^3+2y^2-4y-8=0$

c) $y^3+2y^2+2020=2011$

d) $\left(y-1\right)^2\left(2y+3\right)-\left(y-1\right)^2\left(y+3\right)=5y+16$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $y^3-3y-2=0 \Leftrightarrow y^3-2y^2+2y^2-4y+y-2=0$

$\Leftrightarrow y^2\left(y-2\right)+2y\left(y-2\right)+\left(y-2\right)=0 \Leftrightarrow \left(y^2+2y+1\right)\left(y-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(y+1\right)^2\left(y-2\right)=0 \Leftrightarrow y=2; y=-1$

b) $y^3+2y^2-4y-8=0 \Leftrightarrow \left(y+2\right)^2\left(y-2\right)=0 \Leftrightarrow y=\pm 2$

c) $y^3+2y^2+2020=2011 \Leftrightarrow y^3+2y^2+9=0$

$\Leftrightarrow y^3+3y^2-y^2-3y+3y+9=0 \Leftrightarrow y^2\left(y+3\right)-y\left(y+3\right)+3\left(y+3\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(y+3\right)\left(y^2-y+3\right)=0$

Do $y^2-y+3=\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}>0, \forall y$ nên $y=-3$

d) $(y-1)^2(2y+3)-(y-1)^2(y+3)=5y+16$

$\Leftrightarrow (y-1)^2 y-5y-16=0 \Leftrightarrow y^3-2y^2+y-5y-16=0$

$\Leftrightarrow y^3-4y^2+2y^2-8y+4y-16=0$

$\Leftrightarrow y^2(y-4)+2y(y-4)+4(y-4)=0 \Leftrightarrow (y-4)(y^2+2y+4)=0$

Do $y^2+2y+4=(y+1)^2+3>0, \forall y$ nên $y=4$

17.3. Giải các phương trình (z là ẩn số):

a) $z^4+z^3-7z^2-z+6=0$

b) $z^6-12z^4+23z^2+36=0$

c) $24z^3-20z^2+4z=6z^2-5z+1$

Hướng dẫn giải – đáp số

Đây là các phương trình, bậc cao. Ta phải sử dụng hệ quả của định lý Bézout (xem ví dụ 2) để xác định nhân tử chung và phân tích thành nhân tử bằng phương pháp tách, thêm bớt.

a) $z^4+z^3-7z^2-z+6=0 \Leftrightarrow (z+3)(z-2)(z+1)(z-1)=0$

Tập nghiệm của phương trình là $S=\{-3;-1;1;2\}$

b) $z^6-12z^4+23z^2+36=0 \Leftrightarrow (z^2+1)(z+3)(z-3)(z+2)(z-2)=0$

Tập nghiệm của phương trình là $S=\{-3;-2;2;3\}$

c) $24z^3-20z^2+4z=6z^2-5z+1 \Leftrightarrow 24z^3-26z^2+9z-1=0$

$\Leftrightarrow 24z^3-12z^2-14z^2+7z+2z-1=0 \Leftrightarrow (2z-1)(12z^2-7z+1)=0$

$\Leftrightarrow (2z-1)(12z^2-3z-4z+1)=0 \Leftrightarrow (2z-1)[3z(4z-1)-(4z-1)]=0$

$\Leftrightarrow (2z-1)(3z-1)(4z-1)=0$

Ta tìm được tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\frac{1}{4};\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right\}$

* ***Nhận xét:*** Câu c) còn có cách giải khác. Nếu phân tích ngay hai vế thành nhân tử trước ta thấy $6z^2-5z+1=6z^2-3z-2z+1=(2z-1)(3z-1)$ và có $24z^3-20z^2+4z=4z(3z-1)(2z-1)$ vì thế phương trình trở thành $4z(2z-1)(3z-1)-(2z-1)(3z-1)=0 \Leftrightarrow (2z-1)(3z-1)(4z-1)=0$

17.4. Giải các phương trình:

a) $\left(t^2-t\right)^2+\left(2t+1\right)^2=13+8t$

b) $\left(t^2+t+1\right)t^2=10-t-\left(t+2\right)\left(t^2+t\right)$

c) $\left(t^2+t\right)^2-2\left(t^2+t\right)+1=5\left(t^2+t\right)-9$

d) $\left(t^2-3t+2\right)\left(t^2-7t+12\right)=24$

Hướng dẫn giải – đáp số

Các phương trình này khi khai triển đều là phương trình bậc cao vì thế phương pháp chung là chuyển vế, khai triển, rút gọn đưa về dạng A(t) = 0 sau đó phân tích vế trái thành nhân tử. Tuy nhiên nếu xuất hiện các đa thức chứa ẩn có phần hệ số của các ẩn cùng bậc giống nhau, ta có thể đặt ẩn phụ dễ giải.

a) Chuyển vế, khai triển, rút gọn, sau đó phân tích vế trái thành nhân tử bằng tách, thêm bớt các hạng tử ta được phương trình:

$t^4-2t^3+5t^2-4t-12=0 \Leftrightarrow \left(t-2\right)\left(t+1\right)\left(t^2-t+6\right)=0$

Suy ra nghiệm của phương trình là $t=-1; t=2$.

Nhận xét: Còn cách giải khác, dùng phương pháp đặt ẩn phụ:

$\left(t^2-t\right)^2+\left(2t+1\right)^2=13+8t \Leftrightarrow \left(t^2-t\right)^2+4\left(t^2-t\right)-12=0$

Đặt $t^2-t=u$ ta có phương trình $u^2+4u-12=0 \Leftrightarrow \left(u+6\right)\left(u-2\right)=0$

Với $u+6=0 \Rightarrow t^2-t+6=0$ vô nghiệm vì $t^2-t+6=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{23}{4}>0, \forall t$

Với $u-2=0 \Rightarrow t^2-t-2=0 \Leftrightarrow \left(t-2\right)\left(t+1\right)=0$ nên $t=2; t=-1$.

b) *Cách 1:* Chuyển vế, khai triển, rút gọn sau đó phân tích thành nhân tử đưa về dạng: $\left(t-1\right)\left(t+2\right)\left(t^2+t+5\right)=0$.

Cách 2: Ta biến đổi bài toán như sau $\left(t^2+t+1\right)t^2=10-t-\left(t+2\right)\left(t^2+t\right)$

$\Leftrightarrow \left(t^2+t+1\right)t^2=12-\left(t+2\right)-\left(t+2\right)\left(t^2+t\right)$

$\Leftrightarrow \left(t^2+t+1\right)t^2=12-\left(t+2\right)\left(t^2+t+1\right) \Leftrightarrow \left(t^2+t+1\right)\left(t^2+t+2\right)-12=0$

Đặt $t^2+t+1=u$. Phương trình trở thành $u\left(u+1\right)-12=0$

$\Leftrightarrow u^2+u-12=0 \Leftrightarrow \left(u-3\right)\left(u+4\right)=0$. Hay $\left(t^2+t-2\right)\left(t^2+t+5\right)=0$

Với $t^2+t-2=0 \Leftrightarrow (t-1)(t-2)=0 \Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=-2$

Với $t^2+t+5=0$ vô nghiệm vì $t^2+t+5=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}>0, \forall t$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S=\{-2;1\}$

c) $(t^2+t)^2-2(t^2+t)+1=5(t^2+t)-9$

Đặt $t^2+t=z$ phương trình trở thành $z^2-2z+1=5z-9$

$\Leftrightarrow z^2-7z+10=0 \Leftrightarrow (z-2)(z-5)=0$

Từ đó có $t^2+t-2=0 \Leftrightarrow (t-1)(t+2)=0 \Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=-2$

$t^2+t-5=0 \Leftrightarrow (t-4)(t+5)=0 \Leftrightarrow t=4$ hoặc $t=-5$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S=\{-5;-2;1;4\}$

d) $(t^2-3t+2)(t^2-7t+12)=24$

$\Leftrightarrow (t-1)(t-2)(t-3)(t-4)=24 \Leftrightarrow (t^2-5t+4)(t^2-5t+6)-24=0$

Đặt $t^2-5t+4=y$ phương trình trở' thành $y(y+2)-24=0$

$\Leftrightarrow y^2+2y-24=0 \Leftrightarrow (y+6)(y-4)=0 \Leftrightarrow y=-6$ hoặc $y=4$.

$*$ Với $y+6=0$ ta có $t^2-5t+10=0$ vô nghiệm vì

$t^2-5t+10=\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0, \forall t$

$*$ Với $y-4=0$ ta có $t^2-5t=0 \Leftrightarrow t(t-5)=0 \Leftrightarrow t=0$ hoặc $t=5$

Phương trình có hai nghiệm là $t=0; t=5$.

Nhận xét. Ta có thể đặt $t^2-5t+5=u$ thì phương trình trở thành

$(u-1)(u+1)-24=0 \Leftrightarrow (u-5)(u+5)=0$

Hay $(t^2-5t)(t^2-5t+10)=0$. Giải ta cũng được kết quả trên.

17.5. Giải các phương trình:

a) $(4x+3)^3-(2x-5)^3=(2x+8)^3$

b) $(3x+2016)^3+(3x-2019)^3=(6x-3)^3$

c) $(2x-7)^3+(9-2x)^3=152$

Hướng dẫn giải – đáp số

Trong các bài toán xuất hiện các dạng $(a+b)^3;(a-b)^3$ và $a^3\pm b^3$

Lưu ý: $(a\pm b)^3=a^3\pm b^3\pm 3ab(a\pm b)$ và $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

a) Đặt $y=4x+3; z=2x-5$ thì $y-z=2x+8$. Ta có:

$$y^3-z^3=(y-z)^3\Leftrightarrow y^3-z^3=y^3-z^3-3yz(y-z)\Leftrightarrow 3yz(y-z)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\\z=0\\y-z=0\end{array}\right.\text{ hay }\left[\begin{array}{l}4x+3=0\\2x-5=0\\2x+8=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-0,75\\x=2,5\\x=-4\end{array}\right.$$

Tập nghiệm của phương trình là $S=\{-4;-0,75;2;5\}$

b) Đặt $u=3x+2016; v=3x-2019$ thì $u+v=6x-3$.

Phương trình trên trở thành $u^3+v^3-(u+v)^3=0$ hay

$$u^3+v^3-\left[u^3+v^3+3uv(u+v)\right]=0\Leftrightarrow -3uv(u+v)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=0\\v=0\\u+v=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x+2016=0\\3x-2019=0\\6x-3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-672\\x=673\\x=0,5\end{array}\right.$$

Tập nghiệm của phương trình là $S=\{-672;0,5;673\}$

c) $(2x-7)^3+(9-2x)^3=152$.

Đặt $2x-8=y$ thì $2x-7=y+1; 9-2x=1-y$.

Do đó phương trình trở thành $(y+1)^3+(1-y)^3=152$

Khai triển, rút gọn (hoặc dùng hằng đẳng thức a^3+b^3, ta được

$$6y^2+2=152\Leftrightarrow 6y^2-150=0\Leftrightarrow 6(y+5)(y-5)=0$$

- Với $y+5=0$ thì $2x-8+5=0\Leftrightarrow x=1,5$
- Với $y-5=0$ thì $2x-8-5=0\Leftrightarrow x=6,5$

Tập nghiệm của phương trình là $S=\{1,5;6,5\}$

17.6. Cho phương trình

a) $\left(2x-5\right)^4+\left(2x-3\right)^4=16$

b) $\left(4x-19\right)^4+\left(4x-20\right)^4=\left(39-8x\right)^4$

c) $\left(5x+2,5\right)^4-\left(5x-1,5\right)^4=80$

Hướng dẫn giải – đáp số

Lưu ý dạng a^4-b^4 và $\left(a\pm b\right)^4=a^4\pm 4a^3b+6a^2b^2\pm 4ab^3+b^4$

a) Đặt $2x-4=y$ phương trình trở thành $\left(y-1\right)^4+\left(y+1\right)^4=16$

$\Leftrightarrow y^4-4y^3+6y^2-4y+1+y^4+4y^3+6y^2+4y+1=16$

$\Leftrightarrow 2y^4+12y^2-14=0\Leftrightarrow y^4+6y^2-7=0\Leftrightarrow \left(y^2-1\right)\left(y^2+7\right)=0$

Do $y^2+7>0,\forall y$ nên $y^2-1=0\Leftrightarrow \left(2x-4\right)^2-1=0$

$\Leftrightarrow \left(2x-5\right)\left(2x-3\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-5=0\\2x-3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2,5\\x=1,5\end{array}\right.$

Tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{1,5;2,5\right\}$.

Chú ý: Có thể đặt $2x-5=y$ và $2x-3=z$ ta có $y^4-z^4=\left(y-z\right)^4$ (bạn đọc tự giải).

b) Đặt $4x-19=y;4x-20=z$ thì $y+z=8x-39$ ta có $y^4+z^4-\left(y+z\right)^4=0$

$\Leftrightarrow y^4+z^4-y^4-4y^3z-6y^2z^2-4yz^3-z^4=0$

$\Leftrightarrow -4y^3z-6y^2z^2-4yz^3=0\Leftrightarrow 4yz\left(y^2+\frac{6}{4}yz+z^2\right)=0$

$\Leftrightarrow 4yz\left[\left(y+\frac{3}{4}z\right)^2+\frac{7}{16}z^2\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=0\\z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x-19=0\\4x-20=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4,75\\x=5\end{array}\right.$

Tập nghiệm của phương trinh là $S=\left\{4,75;5\right\}$

c) $\left(5x+2,5\right)^4-\left(4x-1,5\right)^4=80$

Đặt $5x+0,5=y$ phương trình trở thành $\left(y+2\right)^4-\left(y-2\right)^4=80$

Ta dùng khai triển của $\left(y+2\right)^4=y^4+8y^3+24y^2+32y+16$

$\left(y-2\right)^4=y^4-8y^3+24y^2-32y+16$

Thay vào, chuyển vế, rút gọn được phương trình $y^3+4y-5=0$

$\Leftrightarrow y^3-1+4y-4=0 \Leftrightarrow (y-1)(y^2+y+1)+4(y-1)=0$

$\Leftrightarrow (y-1)(y^2+y+5)=0 \Leftrightarrow y=1$ vì $y^2+y+5=\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}>0, \forall y$

Do đó $5x+0,5=1 \Leftrightarrow x=0,1$

*** Nhận xét:** Cách giải khác của c) (bạn đọc tự giải tiếp):

$(y+2)^4-(y-2)^4=\left[(y+2)^2-(y-2)^2\right].\left[(y+2)^2+(y-2)^2\right]=8y.(2y^2+8)$

Phương trình trở thành $16y^3+64y-80=0 \Leftrightarrow y^3+4y-5=0$

17.7. Cho phương trình $x^3-3ax^2+2,5ax+6a=0$

a) Giải phương trình với a = 2;

b) Tìm a để phương trình có nghiệm là nghiệm của phương trình $x^3-x-6=0$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Với $a=2$ phương trình trở thành $x^3-6x^2+5x+12=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-3)(x-4)=0$ .Suy ra $x=-1, x=3, x=4$.

b) $x^3-x-6=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+3)=0 \Leftrightarrow x=2$

vì $x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0, \forall x$.

Để $x=2$ là nghiệm ta phải có: $8-12a+a+6a=0 \Leftrightarrow a=8$.

17.8. Cho phương trình $(x-2)^3-(m^2-2m+7)(x-2)-3(m^2-2m-2)=0$

a) Tìm các giá trị của m để một trong các nghiệm của phương trình là 3;

b) Giải phương trình với các giá trị đó của m.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Thay $x=3$ ta có $-4m^2+8m=0$ tức là $m^2-2m=0$ nên $m=0$ hoặc $m=2$.

b) Thay $m^2-2m=0$ ta có: $(x-2)^3-7(x-2)+6=0$

Đặt $x-2=y$ ta có $y^3-7y+6=0 \Leftrightarrow (y-1)(y-2)(y+3)=0$

$y=1; y=2;$ và $y=-3$

Ta có $x-2=1 \Leftrightarrow x=3; x-2=2 \Leftrightarrow x=4; x-2=-3 \Leftrightarrow x=-1$.

Vậy phương trình có ba nghiệm: $x=-1; x=3; x=4$

17.9. Giải các phương trình sau với tham số m:

a) $9mx^3-18x^2-mx+2=0$

b) $4m^2x^3+45=x\left(36+5m^2x\right)$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $9mx^3-18x^2-mx+2=0 \Leftrightarrow \left(mx-2\right)\left(9x^2-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(mx-2\right)\left(3x-1\right)\left(3x+1\right)=0$

* Nếu $m \neq 0$ thì $\left[\begin{array}{l} mx-2=0 \\ \left(3x+1\right)\left(3x-1\right)=0 \end{array}\right.$. Tìm được $x=\dfrac{2}{m}; x=\pm\dfrac{1}{3}$

* Nếu $m=0$ thì $x=\pm\dfrac{1}{3}$

b) $4m^2x^3+45=x\left(36+5m^2x\right) \Leftrightarrow \left(mx-3\right)\left(mx+3\right)\left(4x-5\right)=0$

* Nếu $m \neq 0$ thì $\left[\begin{array}{l} mx-3=0 \\ mx+3=0 \\ 4x-5=0 \end{array}\right.$. Tìm được $m=\pm\dfrac{3}{m}; x=1,25$

* Nếu $m=0$ thì $x=1,25$

17.10. Giải các phương trình:

a) $\left(4x-5\right)^2\left(2x-3\right)\left(x-1\right)=1,5$

b) $\left(2x+7\right)\left(x+3\right)^2\left(2x+5\right)=18$

c) $\left(x^2-3x+2\right)\left(2x-3\right)\left(2x-5\right)=30$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Nhân 2 vào nhân tử thứ hai, nhân 4 vào nhân tử thứ ba ở vế trái và nhân 8 vào vế phải ta có:

$\left(4x-5\right)^2\left(2x-3\right)\left(x-1\right)=1,5 \Leftrightarrow \left(4x-5\right)^2\left(4x-6\right)\left(4x-4\right)=12$

Đặt $4x-5=t$. Ta có: $t^2\left(t+1\right)\left(t-1\right)=12 \Leftrightarrow t^4-t^2-12=0$

$\Leftrightarrow \left(t^2-4\right)\left(t^2+3\right)=0$

* Với $t^2-4=0$ tức là $\left(4x-5\right)^2-4=0 \Leftrightarrow \left(4x-5-2\right)\left(4x-5+2\right)=0$

$\Leftrightarrow x=1,75$ hoặc $x=0,75$

* Với $t^2+3=0$ vô nghiệm vì $t^2+3>0 \forall t$.

Tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{0,75;1,75\right\}$

b) $\left(2x+7\right)\left(x+3\right)^2\left(2x+5\right)=18$

Nhân hai vế của phương trình với 4 ta được

$\left(2x+7\right)\left(2x+6\right)^2\left(2x+5\right)=72$. Đặt $2x+6=y$ phương trình trở thành

$\left(y+1\right)y^2\left(y-1\right)=72 \Leftrightarrow y^4-y^2-72=0$

$\Leftrightarrow \left(y^2-9\right)\left(y^2+8\right)=0 \Leftrightarrow \left(y-3\right)\left(y+3\right)\left(y^2+8\right)=0$. Do $y^2+8>0, \forall y$

Từ đó có $x=-1,5$ hoặc $x=-4,5$

Tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-4,5;-1,5\right\}$.

c) $\left(x^2-3x+2\right)\left(2x-3\right)\left(2x-5\right)=6 \Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(2x-3\right)\left(2x-5\right)=6$

$\Leftrightarrow \left(2x-2\right)\left(2x-4\right)\left(2x-3\right)\left(2x-5\right)=24$

$\Leftrightarrow \left(4x^2-14x+10\right)\left(4x^2-14x+12\right)=24$

Đặt $4x^2-14x+11=y$ phương trình trở thành $\left(y-1\right)\left(y+1\right)=24$

$\Leftrightarrow y^2-1=24 \Leftrightarrow \left(y-5\right)\left(y+5\right)=0$

– Với $y-5=0$ ta có $4x^2-14x+6=0 \Leftrightarrow \left(x-3\right)\left(4x-2\right)=0$

$\Leftrightarrow x=3$ hoặc $x=0,5$

– Với $y+5=0$ ta có $4x^2-14x+16=0$ vô nghiệm vì

$4x^2-14x+16=\left(2x-\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{15}{4}>0, \forall x$

Vậy tập nghiệm là $S=\left\{0,5;3\right\}$

17.11. Giải các phương trình:

a) $2z^3-3z^2-3z+2=0$

b) $3z^4-13z^3+16z^2-13z+3=0$

c) $2z^4+z^3-6z^2+z+2=0$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Phương trình trong câu a) là phương trình đối xứng bậc lẻ (bậc 3) nên có một trong các nghiệm là - 1. Phân tích vế trái thành nhân tử (lưu ý chắc chắn có một nhân tử chung là $\left(z+1\right)$ vì một trong các nghiệm là - 1)

Ta có $2z^3-3z^2-3z+2=0 \Leftrightarrow \left(z+1\right)\left(z-2\right)\left(2z-1\right)=0$

Tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-1;\frac{1}{2};2\right\}$

b) Phương trình trong câu b) là các phương trình đối xứng bậc chẵn (bậc 4). Ta nhận thấy z = 0 đều không phải là nghiệm nên $z\neq 0$. Ta chia hai vế của phương trình cho z^2 và dùng phương pháp đặt ẩn phụ để giải tiếp. Ta nhận thấy z = 0 không phải là nghiệm của phương trình nên $z\neq 0$. Ta chia hai vế của phương trình cho $z^2\neq 0$ được phương trình tương đương:

$$3z^2-13z+16-\frac{13}{z}+\frac{3}{z^2}=0\Leftrightarrow 3\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)-13\left(z+\frac{1}{z}\right)+16=0$$

Đặt $z+\frac{1}{z}=t$ thì $z^2+\frac{1}{z^2}=t^2-2$. Khi ấy phương trình trở thành:

$$3\left(t^2-1\right)-13t+16=0\Leftrightarrow 3t^2-13t+10=0\Leftrightarrow\left(t-1\right)\left(3t-10\right)=0$$

Với $t-1=0$ tức là $z+\frac{1}{z}-1=0\Leftrightarrow z^2-z+1=0$

Vô nghiệm vì $z^2-z+1=\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,\forall z$

Với $3t-10=0$ tức là $3z+\frac{3}{z}-10=0\Leftrightarrow 3z^2-10z+3=0$

$$\Leftrightarrow 3z^2-9z-z+3=0\Leftrightarrow 3z\left(z-3\right)-\left(z-3\right)=0\Leftrightarrow\left(z-3\right)\left(3z-1\right)=0$$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z-3=0\\3z-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=3\\z=\frac{1}{3}\end{array}\right.$. Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\frac{1}{3};3\right\}$

c) Giải tương tự câu b), chia hai vế của phương trình cho $z^2\neq 0$ được phương trình tương đương: $2\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)-6=0$

Đặt $z+\frac{1}{z}=u$ thì $z^2+\frac{1}{z^2}=u^2-2$. Khi ấy phương trình trở thành:

$$2\left(u^2-2\right)+u-6=0\Leftrightarrow 2u^2+u-10=0\Leftrightarrow\left(u-2\right)\left(2u+5\right)=0$$

Từ đó ta tìm được tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-2;-0,5;1\right\}$

17.12. Tìm bốn số tự nhiên liên tiếp sao cho lập phương của một số bằng tổng các lập phương của ba số kia.

(Thi học sinh giỏi lớp 9 TP. Hồ Chí Minh, năm học 1995 - 1996)

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi số tự nhiên nhỏ nhất là x thì $x^3+(x+1)^3+(x+2)^3=(x+3)^3$

$\Leftrightarrow 2x^3-12x-18=0 \Leftrightarrow x^3-6x-9=0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x+3)=0$

$\Leftrightarrow x=3$ vì $x^2+3x+3=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0, \forall x$

17.13. Giải phương trình $(x+9)(x+10)(x+11)-8x=0$

(Tuyển sinh lớp 10 khối THPTchuyên Toán - Tin ĐHSP Vinh, năm học 2002 - 2003)

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $y=x+15$, ta có: $(y-6)(y-5)(y-4)-8(y-15)=0$

$\Leftrightarrow y(y^2-15y+66)=0$. Do $y^2-15y+66=\left(y-\frac{15}{2}\right)^2+\frac{39}{4}>0; \forall y$

$\Rightarrow y=0 \Rightarrow x=-15$. (Cách khác: Đặt $x+10=y$. Bạn đọc tự giải)

17.14. Giải phương trình $x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$.

(Thi vào lớp 10 THPT chuyên Trần Đại Nghĩa TP. Hồ Chí Minh, năm học 2003 - 2004)

Hướng dẫn giải – đáp số

Biến đổi phương trình thành $(x-2)(x-3)(x-4)(x+5)=0$

Tập nghiệm $S=\{-5;2;3;4\}$

17.15. Giải phương trình $(x^2+3x+2)(x^2+7x+12)=24$.

(Đề thi tuyển vào lớp 10 chuyên ĐHSPNN Hà Nội, năm học 2004 - 2005)

Hướng dẫn giải – đáp số

Biến đổi phương trình thành $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24$

$\Leftrightarrow (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=24$.

Đặt $x^2+5x+5=t$ ta có: $(t-1)(t+1)=24 \Leftrightarrow t^2=25 \Leftrightarrow t=\pm 5$.

Xét với $t=5$ và $t=-5$, ta tìm được hai nghiệm là $x=0$ và $x=-5$.

17.16. Giải phương trình $6x^5-29x^4+27x^3+27x^2-29x+6=0$

(Thi học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Thanh Hóa, năm học 2005 - 2006)

Hướng dẫn giải – đáp số

Biến đổi thành $(x+1)(6x^4-35x^3+62x^2-35x+6)=0$.

Ta tìm được $x=-1$ là 1 nghiệm. Với $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$, do $x=0$ không là nghiệm nên chia hai vế cho x^2 ta được:

$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0$.Đặt $x+\frac{1}{x}=y$ thì $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$

Phương trình trở thành $6\left(y^2-2\right)-35y+62=0 \Leftrightarrow \left(2y-5\right)\left(3y-10\right)=0$

Thay $y=x+\frac{1}{x}$ vào $2y-5=0$ giải ra ta tìm được $x=2$ hoặc $x=\frac{1}{2}$

Thay $y=x+\frac{1}{x}$ vào $3y-10=0$ giải ra ta tìm được $x=3$ hoặc $x=\frac{1}{3}$

Tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-1;\frac{1}{3};\frac{1}{2};2;3\right\}$

17.17. Giải phương trình $\left(3x+4\right)\left(x+1\right)\left(6x+7\right)^2=6$.

(Tuyển sinh lớp 10 THPTchuyên ĐHSP Hà Nội, năm học 2006 - 2007)

Hướng dẫn giải – đáp số

Nhân $\left(3x+4\right)$ với 2; $\left(x+1\right)$ với 6 và vế phải với 12 ta được .

$\left(6x+8\right)\left(6x+6\right)\left(6x+7\right)^2=72$. Đặt $6x+7=y$ phương trình trở thành

$\left(y+1\right)\left(y-1\right)y^2=72 \Leftrightarrow y^4-y^2-72=0 \Leftrightarrow \left(y^2-9\right)\left(y^2+8\right)=0 \Leftrightarrow y=\pm 3$

(do $y^2+8>0, \forall y$). Giải tiếp ta tìm được nghiệm $x=-\frac{2}{3}$ và $x=-\frac{5}{3}$

17.18. Giải phương trình $\left(x^2-2x\right)^2+3x^2-6x=-2$.

(Thi học sinh giỏi lớp 9 huyện Thường Tín - Hà Tây, năm học 2006 - 2007)

Hướng dẫn giải – đáp số

$\left(x^2-2x\right)^2+3x^2-6x=-2 \Leftrightarrow \left(x^2-2x\right)^2+3\left(x^2-2x\right)+2=0$

Đặt $x^2-2x=y$ ta có: $y^2+3y+2=0 \Leftrightarrow \left(y+1\right)\left(y+2\right)=0 \Leftrightarrow y=-1$ hoặc $y=-2$. Với

$x^2-2x=-1 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow x=1$

Với $x^2-2x=-2 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2+1=0$ vô nghiệm

17.19. Giải phương trình $\left(4x+3\right)^2\left(2x+1\right)\left(x+1\right)=810$.

(Tuyển sinh lớp 10 chuyên Tin Quốc học Huế, năm học 2019 - 2010)

Hướng dẫn giải – đáp số

$(4x+3)^2(2x+1)(x+1)=810 \Leftrightarrow \left[8(2x^2+3x)+9\right](2x^2+3x+1)=810$

Đặt $2x^2+3x=y$ phương trình trở thành

$(8y+9)(y+1)-810=0 \Leftrightarrow 8y^2+17y-801=0 \Leftrightarrow (y-9)(8y+89)=0$

* $y-9=0$ tức là $2x^2+3x-9=0 \Leftrightarrow (x+3)(2x-3)=0$

$\Leftrightarrow x=-3$ hoặc $x=1,5$.

* $8y+89=0$ tức là $16x^2+24x+89=0$ vô nghiệm

vì $16x^2+24x+89=(4x+3)^2+80>0, \forall x$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=-3$ và $x=1,5$.

Cách khác: Biến đổi phương trình thành $(4x+3)^2(4x+2)(4x+4)=6480$.

Đặt $4x+3=y$. (Bạn đọc tự giải tiếp)

17.20. Giải phương trình $x^3+3x-140=0$.

Đề thi tuyển vào lớp 10 THPTchuyên Lam Sơn, Thanh Hóa, năm học 2010 - 2011)

Hướng dẫn giải – đáp số

$x^3+3x-140=0 \Leftrightarrow x^3-5x^2+5x^2-25x+28x-140=0$

$\Leftrightarrow (x-5)(x^2+5x+28)=0 \Leftrightarrow x=5$ do $x^2+5x+28=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{87}{4}>0, \forall x$

17.21. Giải phương trình $(x^2-2x)^2+3(x-1)=x(2x-1)$

(Đề thi tuyển vào lớp 10 THPT chuyên Quang Trung, Bỉnh Phước, năm học 2010 - 2011)

Hướng dẫn giải – đáp số

$(x^2-2x)^2+3(x-1)=x(2x-1) \Leftrightarrow (x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3=0$

Đặt $x^2-2x=y$ phương trình thành $y^2-2y-3=0 \Leftrightarrow (y-3)(y+1)=0$

Thay $y=x^2-2x$ vào ta có tập nghiệm của phương trình là $S=\{-1;1;3\}$

17.22. Giải phương trình $(2x^2-x)^2+2x^2-x-12=0$.

(Thi tuyển sinh lớp 10 chuyên TP Hồ Chí Minh, năm học 2010 - 2011)

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $2x^2-x=u$ phương trình trở thành:

$u^2+u-12=0 \Leftrightarrow (u-3)(u+4)=0 \Leftrightarrow u-3=0$ hoặc $u+4=0$.

* $u-3=0$ ta có $2x^2-x-3=0 \Leftrightarrow (x+1)(2x-3)=0 \Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=1,5$.

* $u+4=0$ ta có $2x^2-x+4=0$ vô nghiệm vì $2x^2-x+4=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{31}{8}>0, \forall x$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=-1$ và $x=1,5$.

17.23. Giải phương trình $(x^2-4x+11)(x^4-8x^2+21)=35$.

(Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương, năm học 2012 - 2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

$(x^2-4x+11)(x^4-8x^2+21)=35 \Leftrightarrow \left[(x-2)^2+7\right]\left[(x^2-4)^2+5\right]=35$

$(x-2)^2 \geq 0, \forall x (x^2-4)^2 \geq 0, \forall x$ nên vế trái không nhỏ hơn 35.

Ta suy ra $\begin{cases}(x-2)^2=0\\(x^2-4)^2\end{cases} \Leftrightarrow x=2$. Vậy tập nghiệm của phương trình là $x=2$

Chuyên đề 18. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU THỨC

A. Kiến thức cần nhớ

Bước 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình, (tức là tìm giá trị của ẩn làm tất cả các mẫu thức của phương trình khác 0). Viết tắt: ĐKXĐ.

Bước 2: Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu.

Bước 3: Giải phương trình vừa nhận được.

Bước 4: (Kết luận). Trong các giá trị tìm được ở bước 3, *các giá trị thỏa mãn điều kiện xác định* chính là nghiệm của phương trình đã cho.

* *Chú ý*. Nếu $A(x)=0$ tại $x=x_1$ hoặc $x=x_2$ thì

$$A(x)\neq 0 \text{ khi } x\neq x_1 \text{ và } x\neq x_2$$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Giải các phương trình:

a) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{3}{2x-6}-\frac{1}{2x-4}$ (1)

b) $\frac{25+4x}{25x^2-1}=\frac{4}{5x+1}-\frac{6}{1-5x}$ (2)

* *Tìm cách giải.*

a) Do $2x-6=2(x-3);2x-4=2(x-2)$ nên ĐKXĐ là $x-1\neq 0;x-2\neq 0$ và $x-3\neq 0$. Thực hiện các bước giải.

b) Ta tìm ĐKXĐ tức là tìm giá trị của ẩn làm tất cả các mẫu thức $25x^2-1;5x+1;5x-1$ của phương trình khác 0. Mà $25x^2-1=(5x+1)(5x-1)$ nên ĐKXĐ là $5x+1\neq 0$ và $5x-1\neq 0$.

Thực hiện đầy đủ các bước giải phương trình có ẩn ở mẫu.

Giải

a) ĐKXĐ: $x\neq 1;x\neq 2$ và $x\neq 3$.

Hai giá trị $x=1,5$ và $x=5$ thỏa mãn ĐKXĐ nên là nghiệm phương trình (1).

b) ĐKXĐ: $x\neq \pm 0,2$

$(2)\Rightarrow 25+4x=4(5x-1)+6(5x+1)$

$\Leftrightarrow 25+4x=20x-4+30x+6$

$\Leftrightarrow -46x=-23\Leftrightarrow x=0,5$

Giá trị này thỏa mãn ĐKXĐ. Vậy phương trình có nghiệm là $x=0,5$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\frac{2x-5}{x+1}+\frac{x^2-5x-41}{x^2-3x-4}=\frac{3x-8}{x-4}$ (1)

Giải

Ta có $(1) \Leftrightarrow \frac{2x-5}{x+1}+\frac{x^2-5x-41}{(x+1)(x-4)}=\frac{3x-8}{x-4}$

ĐKXĐ: $x \neq 4$ và $x \neq -1$.

Quy đồng mẫu số hai vế và khử mẫu ta có phương trình:

$(2x-5)(x-4)+x^2-5x-41=(3x-8)(x+1)$

$\Leftrightarrow 2x^2-13x+20+x^2-5x-41=3x^2-5x-8$

$\Leftrightarrow -13x=13 \Leftrightarrow x=-1$

Giá trị này không thỏa mãn ĐKXĐ. Vậy phương trình (1) vô nghiệm.

Ví dụ 3. Cho $A(x)=\frac{(x^2-x-6)(x-5)}{x(x^2+2x+2)}$ và $B(x)=\frac{(x^2-x-6)(x-4)}{3x^3+6x^2+6x}$

a) Tìm x để giá trị của hai biểu thức A(x) và B(x) bằng nhau;

b) Tìm x để $\frac{A(x)}{B(x)}=5$

* *Tìm cách giải:* Bài toán tìm X để giá trị của hai biểu thức A(x) và B(x) bằng nhau quy về tìm nghiệm của phương trình A(x) = B(x).

Xét $\frac{A(x)}{B(x)}=5$ đặc biệt lưu ý A(x); B(x) có nghĩa và $B(x) \neq 0$

Giải

a) Để A(x) = B(x) thì $\frac{(x^2-x-6)(x-5)}{x(x^2+2x+2)}=\frac{(x^2-x-6)(x-4)}{3x(x^2+2x+2)}$

ĐKXĐ: $x(x^2+2x+2) \neq 0$ và $3x^3+6x^2+2x \neq 0$ hay $3x(x^2+2x+2) \neq 0$

Do $x^2+2x+2=(x+1)^2+1 \neq 0, \forall x$ nên ĐKXĐ là $x \neq 0$.

Từ phương trình trên suy ra: $3(x^2-x-6)(x-5)=(x^2-x-6)(x-4)$

$\Leftrightarrow (x^2-x-6)(3x-15)-(x^2-x-6)(x-4)=0$

$\Leftrightarrow (x^2-x-6)(3x-15-x+4)=0$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+2)(2x-11)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ x+2=0 \\ 2x-11=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-2 \\ x=5,5 \end{array}\right.$$

Cả ba giá trị này đều thỏa mãn ĐKXĐ

Vậy với $x=-2; x=3; x=5,5$ thì A(x) = B(x).

b) $\dfrac{A(x)}{B(x)}=5$ nghĩa là $\dfrac{(x^2-x-6)(x-5)}{x(x^2+2x+2)}:\dfrac{(x^2-x-6)(x-4)}{3x^3+6x^2+6x}=5$

Hay là $\dfrac{(x^2-x-6)(x-5)}{x(x^2+2x+2)}.\dfrac{3x(x^2+2x+2)}{(x^2-x-6)(x-4)}=5$ (*)

Do $x^2+2x+2=(x+1)^2+1\neq 0,\forall x$, nên ta có

$(*)\Leftrightarrow \dfrac{3x(x^2-x-6)(x-5)}{x(x^2-x-6)(x-4)}=5\dfrac{3x(x+2)(x-3)(x-5)}{x(x+2)(x-3)(x-4)}=5$

ĐKXĐ: $x\neq 0; x\neq -2; x\neq 3; x\neq 4$

Từ ĐKXĐ và phương trình trên suy ra $3(x-5)-5(x-4)=0$

$\Leftrightarrow 3x-15-5x+20=0\Leftrightarrow 2x=5\Leftrightarrow x=2,5$ thỏa mãn ĐKXĐ.

* Nhận xét: Từ $\dfrac{3x(x+2)(x-3)(x-5)}{x(x+2)(x-3)(x-4)}=5$ suy ra $3(x-5)-5(x-4)=0$

Ta có thể hiểu như sau: Do $x\neq 0; x\neq 2; x\neq 3$; nên $x(x-2)(x-3)\neq 0$. Do đó chia cả tử và mẫu cho số khác 0 ta có $\dfrac{3(x-5)}{(x-4)}=5$ và với $x\neq 4$ ta được phương trình tương đương $3(x-5)-5(x-4)=0$

Hoặc có thể hiểu như sau:

Từ $\dfrac{3x(x+2)(x-3)(x-5)}{x(x+2)(x-3)(x-4)}=5$ với $x\neq 0; x\neq -2; x\neq 3; x\neq 4$ ta có:

$3x(x+2)(x-3)(x-5)=5x(x+2)(x-3)(x-4)$

$\Leftrightarrow x(x+2)(x-3)[3(x-5)-5(x-4)]=0$

$\Leftrightarrow 3(x-5)-5(x-4)=0 \quad do \;\; x(x+2)(x-3)\neq 0$

Ví dụ 4. Cho phương trình ẩn x:

$\dfrac{x+2m}{x-5}-1=\dfrac{x+5}{2m-x}+1$ (với m là hằng số).

a) Giải phương trình với m = 5;

b) Tìm m để phương trình có nghiệm $x=10$;

c) Giải phương trình với tham số m.

* *Tìm cách giải:* Đây là phương trình tham số. Khi giải cần lưu ý biện luận theo các giá trị của tham số m.

Giải

$\dfrac{x+2m}{x-5}-1=\dfrac{x+5}{2m-x}+1\Leftrightarrow \dfrac{x+2m}{x-5}+\dfrac{x+5}{x-2m}=2$

a) Khi m = 5 ta có: $\dfrac{x+10}{x-5}+\dfrac{x+5}{x-10}=2 \qquad (1)$

Với ĐKXĐ $x\neq 5$ và $x\neq 10$ thì

từ $(1)\Rightarrow x^2-100+x^2-25=2x^2-30x+100$

$\Leftrightarrow 30x=225\Leftrightarrow x=7,5$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

b) Nếu $x=10$ ta có ($\dfrac{10+2m}{5}+\dfrac{15}{10-2m}=2 \qquad (2)$

Với ĐKXĐ $m\neq 5$ $(2)\Rightarrow 100\ -4m^2+75=100-20m$

$\Leftrightarrow 4m^2-20m-75=0$

$\Leftrightarrow (2m-15)(2m+5)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2m-15=0\\ 2m+5=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=7,5\\ m=-2,5\end{array}\right.$

c) Điều kiện của nghiệm nếu có là $x\neq 5$ và $x\neq 2m$

Biến đổi phương trình $\dfrac{x+2m}{x-5}+\dfrac{x+5}{x-2m}=2$ thành

$(x+2m)(x-2m)+(x+5)(x-5)=2(x-5)(x-2m)$

$\Leftrightarrow x^2-4m^2+x^2-25=2x^2-4mx-10x+20m$

$\Leftrightarrow 4mx+10x=4m^2+20m+25\Leftrightarrow 2x(2m+5)=(2m+5)^2 \qquad (*)$

Nếu $m\neq -2,5$ thì $x=\dfrac{2m+5}{2}$. Giá trị này là nghiệm của phương trình nếu

$\dfrac{2m+5}{2}\neq 2m\Rightarrow 2m+5\neq 4m\Leftrightarrow m\neq 2,5$

và $\dfrac{2m+5}{2}\neq 5\Rightarrow 2m+5\neq 10\Rightarrow m\neq 2,5$

+ Nếu $m=-2,5$ thì (*) có dạng $0x=0$. Phương trình nghiệm đúng $\forall x\neq \pm 5$

Kết luận: Nếu $m\neq \pm 2,5$ phương trình có nghiệm duy nhất là $x=\dfrac{2m+5}{2}$

Nếu $m=2,5$ phương trình vô nghiệm;

Nếu $m=-2,5$ phương trình nghiệm đúng $\forall x\neq \pm 5$

Nhận xét: Câu b) có cách giải khác như sau:

$\dfrac{10+2m}{5}+\dfrac{15}{10-2m}=2\Rightarrow 100-4m^2+75=100-20m$

$\Leftrightarrow 100 = 4m^2 - 20m + 25$

$\Leftrightarrow 10^2 = (2m-5)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m-5=10 \\ 2m-5=-10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m=15 \\ 2m=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=7,5 \\ m=-2,5 \end{array}\right.$

Ví dụ 5. Giải phương trình:

$$\frac{1}{y^2+y}+\frac{1}{y^2+3y+2}+\frac{1}{y^2+5y+6}+\frac{1}{y^2+7y+12}+\frac{1}{y^2+9y+20}=\frac{1}{15}$$

* *Tìm cách giải:* Các phân thức vế trái sau khi phân tích mẫu thành nhân tử có dạng $\frac{1}{a(a+1)}$. Ta có:

$$\frac{1}{a(a+1)}=\frac{(a+1)-a}{a(a+1)}=\frac{a+1}{a(a+1)}-\frac{a}{a(a+1)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}$$

Giải

ĐKXĐ: $y \neq 0; y \neq -1; y \neq -2; y \neq -3; y \neq -4; y \neq -5$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{y(y+1)}+\frac{1}{(y+1)(y+2)}+\frac{1}{(y+2)(y+3)}+\frac{1}{(y+3)(y+4)}+\frac{1}{(y+4)(y+5)}=\frac{1}{30}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y}-\frac{1}{y+1}+\frac{1}{y+1}-\frac{1}{y+2}+\frac{1}{y+2}-\frac{1}{y+3}+\frac{1}{y+3}-\frac{1}{y+4}+\frac{1}{y+4}-\frac{1}{y+5}=\frac{1}{30}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y}-\frac{1}{y+5}=\frac{1}{30}$$

$$\Rightarrow 30(y+5)-30y=y^2+5y$$

$$\Leftrightarrow y^2+5y-150=0$$

$$\Leftrightarrow (y-10)(y+15)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-10=0 \\ y+15=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=10 \\ y=-15 \end{array}\right.$$

Tập nghiệm là $S=\{-15;10\}$

Ví dụ 6. Giải phương trình (với z là ẩn; m, n là tham số):

$$\frac{m(z^2+1)}{z^2-1}-\frac{n}{z+1}+\frac{1}{z-1}=\frac{mz}{z-1}.$$

* *Tìm cách giải.* Phương trình có ẩn ở mẫu chứa tham số, cần lưu ý ĐKXĐ và biện luận theo các tham số m và n.

Giải

ĐKXĐ: $z \neq \pm 1$.

Khi ấy phương trình (PT) trở thành $\dfrac{m(z^2+1)}{z^2-1}-\dfrac{n}{z+1}+\dfrac{1-mz}{z-1}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{m(z^2+1)-n(z-1)+(1-mz)(z+1)}{z^2-1}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{mz^2+m-nz+n+z+1-mz^2-mz}{z^2-1}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(m+n+1)-(m+n-1)z}{z^2-1}=0$

$\Rightarrow (m+n+1)-(m+n-1)z=0$

+ Nếu $n+n-1=0$ phương trình trở thành $2-0z=0 \Leftrightarrow 0z=2$

Phương trình này vô nghiệm. Do đó PT vô nghiệm.

+ Nếu $\Leftrightarrow m+n-1 \neq 0$ thì $z=\dfrac{m+n+1}{m+n-1}$

Đối chiếu với ĐKXĐ ta thấy:

$z=\dfrac{m+n+1}{m+n-1} \neq 1$ luôn được thỏa mãn

vì nếu z = 1 thì sẽ suy ra 1 = -1, vô lí

$z=\dfrac{m+n+1}{m+n-1} \neq -1$ được thỏa mãn nếu $m+n \neq 0$

Vì nếu $z=-1$ thì $\dfrac{m+n+1}{m+n-1}=-1$ thì $m+n+1=-m-n+1$ suy ra $2(m+n)=0$ hay $m+n=0$.

Kết luận:

+ Nếu $m+n=1$ hoặc $m+n=0$ thì PT vô nghiệm.

+ Nếu $m+n \neq 1$ và $m+n \neq 0$ thì PT có nghiệm là $z=\dfrac{m+n+1}{m+n-1}$

C. Bài tập vận dụng

18.1. Giải các phương trình:

a) $\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{x-5}{x+4}=\dfrac{2x^2}{x^2+x-12}$;

b) $\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}=\dfrac{3}{x-4}$;

c) $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{x-5}{x-1}+1=\dfrac{3}{x^2+x-2}$;

d) $\dfrac{7}{x-4}+1=\dfrac{3}{x^2-5x+4}-\dfrac{1}{x-1}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) ĐKXĐ: $x\neq 3; x\neq -4$. Lưu ý: $x^2+x-12=(x-3)(x+4)$

Đáp số: $x=27$.

b) ĐKXĐ: $x\neq 2; x\neq 3; x\neq 4$. Biến đổi thành $2x^2-17x+30=0$

Đáp số: $x=2,5; x=6$.

c) ĐKXĐ: $x\neq 1; x\neq -2$. Lưu ý: $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$. Đáp số $x=-0,8$.

d) ĐKXĐ: $x\neq 1; x\neq 4$. Lưu ý: $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$

Đáp số: $x=2; x=-5$.

18.2. Giải các phương trình:

a) $3+\dfrac{3+x}{3-x}=\dfrac{3x-1}{x+3}-\dfrac{35}{x^2-9}$;

b) $\dfrac{x-3}{2-x}+\dfrac{2x^2-21}{x^3-8}=\dfrac{5}{x^2+2x+4}$

c) $\dfrac{x^2-3x}{x^2+3x}+\dfrac{25}{2x^2+3x-9}=\dfrac{5-2x}{2x-3}+\dfrac{2x^2+61}{(2x-3)(x+3)}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) ĐKXĐ: $x\neq 3; x\neq -3$. Lưu ý: $x^2-9=(x-3)(x+3)$

Biến đổi thành $-x^2+4x-4=0$. Đáp số: $x=2$.

b) Ta có $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$ mà $x^2+2x+4=(x+1)^2+3>0$

$\forall x$ nên ĐKXĐ: $x\neq 2$. Biến đổi thành $-(x^3-3x^2+3x-1)=0$.Đáp số: $x=1$

c) ĐKXĐ: $x\neq 1,5; x\neq -3$. Lưu ý: $2x^2+3x-9=(2x-3)(x+3)$

Biến đổi thành $x^2-4x-21=0 \Leftrightarrow (x+3)(x-7)=0 \Leftrightarrow x=-3$ hoặc $x=7$.

Nghiệm là $x=7$ (loại $x=-3$ vì không thỏa mãn ĐKXĐ).

18.3. Giải các phương trình:

a) $\dfrac{y+1}{(y+1)^2+1}+\dfrac{y}{(y-1)^2+1}=\dfrac{2(y^3+5)}{y^4+4}$

b) $\dfrac{y(y+2)}{y^2+2(y+2)}-\dfrac{y(y-2)}{y^2-2(y-2)}=\dfrac{36-y^2}{y^4+4y^2+16}$;

c) $y^2\left[\dfrac{1}{y(y-1)+1}-\dfrac{1}{y(y+1)+1}\right]=\dfrac{3}{(y^4+y^2+1)y}+\dfrac{2y-2}{y^2-y+1}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Các phân thức ở các phương trình trong bài xuất hiện đa thức bạc bốn ở mẫu số, việc phân tích các mẫu thành nhân tử đòi hỏi việc thêm, bớt các hạng tử một cách hợp lý, sáng tạo.

a) Nhận xét: $(y+1)^2+1=y^2+2y+2>0,\forall y$

$(y-1)^2+1=y^2-2y+2>0,\forall y$

$y^4+4=(y+2)^2-4y^2=(y^2+2y+2)(y^2-2y+2)>0,\forall y$

Do đó ĐKXĐ là $\forall y\in\mathbb{R}$. Quy đồng, khử mẫu, chuyển vế và thu gọn được phương trình

$y^2+2y-8=0\Leftrightarrow(y+4)(y-2)=0\Leftrightarrow y=-4$ hoặc $y=2$. Cả hai giá trị đều thỏa mãn ĐKXĐ.

Phương trình có hai nghiệm là $y=-4$ và $y=2$.

b) Ta có $y^2+2(y+2)=y^2+2y+4=(y+1)^2+3>0,\forall y$

và $y^2-2(y-2)=y^2-2y+4=(y-1)^2+3>0,\forall y$

$y^4+4y^2+16=y^4+8y^2+16-4y^2=(y^2+4)^2-4y^2$

$=(y^2+2y+4)(y^2-2y+4)>0,\forall y$

Do đó ĐKXĐ là $\forall y\in\mathbb{R}$. Quy đồng, khử mẫu, chuyển vế và thu gọn được:

$y^2+16y-36=0\Leftrightarrow(y+18)(y-2)=0\Leftrightarrow y=-18$ hoặc $y=2$.

Cả hai giá trị đều thỏa mãn ĐKXĐ.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $y=-18$ và $y=2$.

c) $y^2\left[\dfrac{1}{y(y-1)+1}-\dfrac{1}{y(y+1)+1}\right]=\dfrac{3}{(y^4+y^2+1)y}+\dfrac{2y-2}{y^2-y+1}$

Ta có: $y(y-1)+1=y^2-y+1=\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0,\forall y$;

$y(y+1)+1=y^2+y+1=\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,\forall y$

$y^4+y^2+1=y^4+2y^2+1-y^2=\left(y^2+1\right)^2-y^2$

$=\left(y^2+y+1\right)\left(y^2-y+1\right)>0,\forall y$

Vậy ĐKXĐ là $y\neq 0$.

Thực hiện các bước giải ta được nghiệm của phương trình là $y=1,5$

18.4. Giải các phương trình:

a) $\frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)$

b) $3\left(1+\frac{1}{z}\right)=2z\left(1+\frac{1}{z}\right)\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\right)$;

c) $z^2-6z+13=\frac{10}{z^2-6z+10}$

d) $\left(\frac{z^2+2z+4}{z-2}\right)^2+7=\frac{8-z^3}{(z-2)^2}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) ĐKXĐ: $z\neq 0$.

Biến đổi thành $2z^3-3z^2-4=0\Leftrightarrow(x-2)\left(2z^2+z+2\right)=0$

$\Leftrightarrow z=2$ do $2z^2+z+2=2\left[\left(z+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}\right]>0,\forall z$

$z=2$ thỏa mãn ĐKXĐ nên là nghiệm của phương trình.

b) ĐKXĐ: $z\neq 0$. Ta có: $2z^3-3z^2-3z+2=0$

$\Leftrightarrow(z+1)(z-2)(2z-1)=0\Leftrightarrow z=-1;z=2$ hoặc $z=\frac{1}{2}$

Cả ba giá trị này đều thỏa mãn ĐKXĐ nên là nghiệm của phương trình..

c) Do $z^2-6z+10=(z-3)^2+1>0,\forall z$ nên ĐKXĐ: $\forall z\in\mathbb{R}$.

Đặt $z^2-6z+10=t>0$ ta có $(t+3)-\frac{10}{t}=0\Leftrightarrow t^2+3t-10=0$

$\Leftrightarrow(t+5)(t-2)=0\Leftrightarrow t=2\left(do\ t>0\right)\Leftrightarrow z^2-6z+10=2$

$\Leftrightarrow (z-2)(z-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2 \\ z=4 \end{array}\right.$

$z=2; z=4$ đều thỏa mãn ĐKXĐ nên là nghiệm của phương trình.

d) ĐKXĐ: $z \neq 2$

Lưu ý $z^3-8=(z-2)(z^2+2z+4)$

Đặt $\dfrac{z^2+2z+4}{z-2}=t$

Biến đổi phương trình thành $\Leftrightarrow t^2+8t+7=0 \Leftrightarrow (t+1)(t+7)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-7 \end{array}\right.$

* Với $t=-1$ thì $\dfrac{z^2+2z+4}{z-2}=-1 \Leftrightarrow z^2+3z+2=0 \Leftrightarrow (z+1)(z+2)=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-1 \\ z=-2 \end{array}\right.$. Thỏa mãn ĐKXĐ.

* Với $t=-7$ thì $\dfrac{z^2+2z+4}{z-2}=-7 \Leftrightarrow z^2+9z-10=0 \Leftrightarrow (z-1)(z+10)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=-10 \end{array}\right.$. Thỏa mãn ĐKXĐ.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{-10;-2;-1;1\}$

18.5. Giải các phương trình:

a) $\dfrac{(t-2)^2}{t^2-4t+5}-\dfrac{t^2-4t+3}{(t-2)^2}=\dfrac{1}{90}$

b) $\dfrac{t^2+2t+2}{t^2+2t+3}+\dfrac{t^2+2t+3}{t^2+2t+4}=\dfrac{17}{12}$

c) $\dfrac{3t}{t^2+3t+2}+\dfrac{2t}{t^2+t+2}=1$

Hướng dẫn giải – đáp số

Trong các câu a); b) ta thấy xuất hiện các hạng tử chứa ẩn cùng bậc trong các đa thức có hệ số giống nhau nên sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ để giải. Câu c) sau khi chia cả tử và mẫu cho mới xuất hiện ẩn phụ.

a) ĐKXĐ: $t \neq -2$. Đặt $t^2-4t=u$ và $u \neq -4$ và $u \neq -5$.

Phương trình trở thành $\dfrac{u+4}{u+5}-\dfrac{u+3}{u+4}=\dfrac{1}{90}$. Biến đổi được $u^2+9u-70=0$

$\Leftrightarrow (u-5)(u+14)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u-5=0 \\ u+14=0 \end{array}\right.$

+ Với $u-5=0 \Leftrightarrow t^2-4t-5=0 \Leftrightarrow (t-5)(t+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=5 \\ t=-1 \end{array}\right.$

+ Với $u+14=0 \Leftrightarrow t^2-4t+14=0$ vô nghiệm vì $t^2-4t+14=(t-2)^2+10>0\ \ \forall t$.

Phương trình có hai nghiệm là $t=-1$ và $t=5$.

b) ĐKXĐ: $\forall x \in \mathbb{R}$ do $t^2+2t+3=(t+1)^2+2>0\ \ \forall t$

$t^2+2t+4=(t+1)^2+3>0\ \ \forall t$

Đặt $t^2+2t+3=u$ phương trình trở thành $\dfrac{u-1}{u}+\dfrac{u}{u+1}=\dfrac{17}{12}$

Biến đổi phương trình thành $7u^2-17u-12=0$

$\Leftrightarrow (u-3)(7u+4)=0 \Leftrightarrow u=3(do\ \text{u}>0)$

Hay $t^2+2t+3=3 \Leftrightarrow t^2+2t=0 \Leftrightarrow t(t+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-2 \end{array}\right.$

Nghiệm của phương trình là $t=-2$ và $t=0$.

c) ĐKXĐ: $t^2+3t+2=(t+1)(t+2)\neq 0$ khi $t\neq -1$ và $t\neq -2$.

Vì $t^2+t+2=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0, \forall t$. Do $t=0$ không phải là nghiệm $\Rightarrow t\neq 0$

Chia cả tử và mẫu của hai phân thức ở vế trái cho t ta được phương trình:

$-\dfrac{3}{t+\dfrac{2}{t}+3}+\dfrac{2}{t+\dfrac{2}{t}+1}=1 \Leftrightarrow \dfrac{3}{u+3}+\dfrac{2}{u+1}=1$ với $t+\dfrac{2}{t}=u$ và $u\neq -1$ và $u\neq -3$

Giải phương trình với ẩn u ta được $u^2-u-6=0 \Leftrightarrow (u-3)(u+2)=0$

$\Leftrightarrow u=3$ hoặc $u=-2$ thỏa mãn ĐKXĐ.

Với $u=3$ ta có $t+\dfrac{2}{t}=3 \Leftrightarrow t^2-3t+2=0 \Leftrightarrow (t-1)(t-2)=0$

$\Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=2$

Với $u=-2$ ta có $2+\dfrac{2}{t}=-2 \Leftrightarrow t^2+2t+2=0$ vô nghiệm vì

$t^2+2t+2=(t+1)^2+1>0, \forall t$

Vậy nghiệm của phương trình là $t=1$ và $t=2$

18.6. Giải các phương trình:

a) $\left(2x^2+9x-4\right)\left(\frac{3x-2}{8-9x}+1\right)=\left(x^2+11x+20\right)\left(\frac{3x-2}{8-9x}+1\right)$

b) $\frac{x}{2x^2-5x+3}-\frac{2x+2}{2x^2-9x+7}=\frac{5}{2x^2-5x+3}-\frac{x+7}{2x^2-9x+7}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Hai vế có nhân tử chung. Ta chuyển vế rồi đưa về dạng $A(x).B(x)=0$

ĐKXĐ: $x\neq\frac{8}{9}$. Biến đổi phương trình thành $\left(x^2-2x-24\right)\left(\frac{3x-2}{8x+9}+1\right)=0$

+ Với $x^2-2x-24=0\Leftrightarrow(x+4)(x-6)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4\\x=6\end{array}\right.$

+ Với $\frac{3x-2}{8-9x}+1=0\Leftrightarrow 3x-2+8-9x=0\Leftrightarrow x=1$

Cả ba giá trị trên x đều thỏa mãn ĐKXĐ nên tập nghiệm của phương trình là $S=\{-4;1;6\}$

b) Các mẫu số khá phức tạp nên không dễ tìm ĐKXĐ. Nếu ta chuyển vế rồi cộng, trừ các phân thức cùng mẫu ta thấy xuất hiện nhân tử chung là $(x-5)$

Từ đó có cách giải sau: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{x-5}{2x^2-5x+3}-\frac{x-5}{2x^2-9x+7}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-5)\left(\frac{1}{2x^2-5x+3}-\frac{1}{2x^2-9x+7}\right)=0\Leftrightarrow\frac{(x-5)(4-4x)}{\left(2x^2-5x+3\right)\left(2x^2-9x+7\right)}=0$$

Xét tử số $(x-5)(4-4x)=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=5$.

+ Với $x=1$ thì $2x^2-9x+7=0\Rightarrow$ phương trình không xác định.

+ Với $x=5$ thì $\left(2x^2-5x+3\right)\left(2x^2-9x+7\right)=28.12\neq0$.

Vậy nghiệm duy nhất của phương trình là $x=5$.

18.7. Cho phương trình $x\left(\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x-a}\right)=\frac{5a(a+3x)}{4\left(x^2-a^2\right)}-\frac{x}{x-a}$ với a là hằng số.

a) Tìm a để phương trình trên có nghiệm là nghiệm của phương trình $\frac{3}{x-5}-\frac{2}{x+5}=\frac{-29}{25-x^2}$;

b) Giải phương trình với a = 6.

Hướng dẫn giải – đáp số

ĐKXĐ: $x \neq \pm a$

Với ĐKXĐ trên ta biến đổi phương trình thành:

$\frac{x}{x+a} + \frac{2x}{x-a} = \frac{5a^2 + 15ax}{4(x^2 - a^2)}$. Quy đồng và khử mẫu được phương trình

$4x(x-a) + 8x(x+a) = 5a^2 - 15ax$

$\Leftrightarrow 12x^2 - 11ax - 5a^2 = 0 \Leftrightarrow 12x^2 + 4ax - 15ax - 5a^2 = 0 \Leftrightarrow (3x+a)(4x-5a) = 0$

a) Giải phương trình $\frac{3}{x-5} - \frac{2}{x+5} = \frac{-29}{25-x^2}$ với $x \neq \pm 5$ ta có nghiệm $x = 4$

Với $x = 4$ ta có: $(12+a)(16-5a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1,2 \\ a = 3,2 \end{array}\right.$

b) Khi $a = 6$ thì $(3x+6)(4x-30) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 7,5 \end{array}\right.$ thỏa mãn ĐKXĐ.

18.8. Tìm x biết $\frac{m^2+n^2}{x} + \frac{m^2n^2}{x^2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) = -\frac{2mn}{x} - (m+n)$ với m; n là hằng số $m \neq 0, n \neq 0$;

Hướng dẫn giải – đáp số

ĐKXĐ: $x \neq 0$

Chuyển vế ta có $\frac{m^2+n^2+2mn}{x} + \frac{m^2n^2}{x^2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) + (m+n) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{(m+n)^2}{x} + \frac{mn(m+n)}{x^2} + (m+n) = 0$

Quy đồng và khử mẫu được phương trình

$(m+n)x^2 + (m+n)^2 x + mn(m+n) = 0 \Leftrightarrow (m+n)\left[x^2 + (m+n)x + mn\right] = 0$

+ Nếu $m+n = 0$ thì phương trình thỏa mãn $\forall x \neq 0$

+ Nếu $m+n \neq 0$ thì $x^2 + (m+n)x + mn = 0$

$\Leftrightarrow (x+m)(x+n) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -m \\ x = -n \end{array}\right.$ thỏa mãn ĐK $x \neq 0$

18.9. Giải các phương trình:

a) $\frac{3}{x^2-5x+6} - \frac{4}{x^2-7x+12} = \frac{5}{x^2-6x+8} + \frac{14}{x^3-9x^2+26x-24}$

b) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}+....+\dfrac{1}{x^2+39x+380}=\dfrac{19}{42}$

c) $\dfrac{2}{x^2-2x}+\dfrac{2}{x^2-6x+8}+....+\dfrac{2}{x^2-18x+80}=\dfrac{5}{12}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) ĐKXĐ: $x\neq 2; x\neq 3; x\neq 4$. Phân tích các mẫu thành nhân tử ta có:

$$\frac{3}{(x-2)(x-3)}-\frac{4}{(x-3)(x-4)}=\frac{5}{(x-2)(x-4)}+\frac{14}{(x-2)(x-3)(x-4)}$$

Quy đồng và khử mẫu được phương trình

$3(x-4)-4(x-2)=5(x-3)+14$

$\Leftrightarrow 3x-12-4x+8=5x-15+14 \Leftrightarrow x=-0,5$ thỏa mãn ĐKXĐ.

b) ĐKXĐ: $x\notin\{-1;-2;-3;....;-19;-20\}$.

Nhận xét: với $n\in N$ thì

$$\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}=\frac{(x+n+1)-(x+n)}{(x+n)(x+n+1)}=\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n+1}$$

Biến đổi phương trình đã cho thành:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+....+\frac{1}{(x+19)(x+20)}=\frac{19}{42}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+...+\frac{1}{x+19}-\frac{1}{x+20}=\frac{19}{42}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+20}=\dfrac{19}{42}$. Quy đồng và khử mẫu được phương trình

$x^2+21x-22=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+22)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-22 \end{array}\right.$ thỏa mãn ĐKXĐ

c) ĐKXĐ: $x\notin\{0;2;4;6;8;10\}$

Nhận xét: với $n\in N$ ta có

$$\frac{2}{(x+n)(x+n-2)}=\frac{(x+n)-(x+n-2)}{(x+n)(x+n-2)}=\frac{1}{x+n-2}-\frac{1}{x+n}$$

Biến đổi phương trình đã cho thành:

$$\frac{2}{x(x-2)}+\frac{2}{(x-2)(x-4)}+.....+\frac{2}{(x-8)(x-10)}=\frac{5}{12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-2}+.....+\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x-8}=\frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{x-10}-\frac{1}{x}=\frac{5}{12}$$

Quy đồng và khử mẫu được phương trình: $x^2-10x-24=0$

$\Leftrightarrow (x-12)(x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=12 \\ x=-2 \end{array}\right.$ thỏa mãn ĐKXĐ.

18.10. Giải các phương trình: $\dfrac{x^2-4x+6}{x-2}+\dfrac{x^2-6x+12}{x-3}=(2x-5)-\dfrac{x^2-24}{x^2-5x+6}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có thể vận dụng các bước để giải. Nếu quy đồng mẫu ngay sẽ xuất hiện các đa thức bậc ba, việc thực hiện sẽ dài. Tuy nhiên có phương pháp khá sáng tạo và ngắn gọn như sau:

* ĐKXĐ: $x \neq 2; x \neq 3$. Biến đổi phương trình thành:

$$\frac{x^2-4x+6}{x-2}+\frac{(x^2-6x+9)+3}{x-3}=(2x-5)-\frac{x^2-24}{(x-2)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)+\frac{2}{x-2}+(x-3)+\frac{3}{x-3}=(2x-5)-\frac{x^2-24}{(x-2)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}+\frac{x^2-24}{(x-2)(x-3)}=0$$

Quy đồng và khử mẫu được phương trình $x^2+5x-36=0$

$\Leftrightarrow (x+9)(x-4)=0 \Leftrightarrow x=-9$ hoặc $x=4$ thỏa mãn ĐKXĐ.

18.11. Giải các phương trình: $\dfrac{2x}{2x^2-5x+3}+\dfrac{13x}{2x^2+x+3}=6$

(Thi vào lớp 10 chuyên Quốc học Huế, năm học 1996 - 1997)

Hướng dẫn giải – đáp số

ĐKXĐ: $2x^2-5x+3=(x-1)(2x-3)\neq 0$ khi $x\neq 1$ và $x \neq 1,5$

$2x^2+x+3=2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{23}{8}>0, \forall x$. Do $x=0$ không là nghiệm của phương, đặt $2x+\dfrac{3}{x}=t$

$$PT \Leftrightarrow \frac{2}{2x-5+\frac{3}{x}}+\frac{13}{2x+1+\frac{3}{x}}=6 \Leftrightarrow \frac{2}{t-5}+\frac{13}{t+1}=6$$

ĐKXĐ $t\neq 5$ và $t \neq -1$

$\Leftrightarrow 6t^2-39t+33=0\text{t} \Leftrightarrow (t-1)(6t-33)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=5,5 \end{array}\right.$

Ta có: $\left[\begin{array}{l} 2x+\dfrac{3}{x}=1 \\ 2x+\dfrac{3}{x}=\dfrac{11}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x^2-x+3=0 & (1) \\ 4x^2-11x+6=0 & (2) \end{array}\right.$

(1) vô nghiệm vì $2x^2-x+3=2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{23}{8}>0,\forall x$

$(2)\Leftrightarrow(x-2)(4x-3)=0\Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=\dfrac{3}{4}$ thỏa mãn ĐKXĐ

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=2;x=\dfrac{3}{4}$

18.12. Giải phương trình $x^3+\dfrac{x^3}{(x-1)^3}+\dfrac{3x^2}{x-1}-2=0$

(Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, năm học 2000 - 2001)

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)\Rightarrow a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

Áp dụng để giải phương trình. Ta có ĐKXĐ: $x\neq 1$

$PT\Leftrightarrow\left(x+\dfrac{x}{x-1}\right)^3-3x.\dfrac{x}{x-1}\left(x+\dfrac{x}{x-1}\right)+\dfrac{3x^2}{x-1}-2=0$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)^3-3\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)+3\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)-1-1=0$. Đặt $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ ta có

$y^3-3y^2+3y-1-1=0\Leftrightarrow(y-1)^3=1\Leftrightarrow y=2$

Hay là $\dfrac{x^2}{x-1}=2\Rightarrow x^2=2x-2\Leftrightarrow x^2-2x+2=0$

Phương trình đã cho vô nghiệm vì $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0\ \forall x$

18.13. Giải phương trình $\dfrac{5}{x^2-4x+5}-x^2+4x-1=0$

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Quốc học Huế, năm học 2002 - 2003)

Hướng dẫn giải – đáp số

ĐKXĐ: $x\in\mathbb{R}$ do $x^2-4x+5=(x-2)^2+1\neq 0;\forall x$

Đặt $x^2-4x+5=y$ thì $y\geq 1$ và $-x^2+4x-1=-y+4$. Phương trình thành

$$\frac{5}{y}-y+4=0 \Leftrightarrow 5-y^2+4y=0 \Leftrightarrow (y-5)(y+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=5 \\ y=-1(\text{loại}) \end{array}\right.$$

* $x^2-4x+5=5 \Leftrightarrow x(x-4)=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=4$. Tập nghiệm $S=\{0;4\}$

18.14. Giải phương trình

$$\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x^2-7x+12}+\frac{1}{x^2-9x+20}+\frac{1}{x^2-11x+30}=\frac{1}{8}$$

(Khảo sát chất lượng học sinh giỏi Toán 8 huyện Thường Tín - Hà Nội, năm học2012 - 2013).

Hướng dẫn giải – đáp số

ĐKXĐ: $x \in \{2;3;4;5;6\}$

$$PT \Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{(x-3)(x-4)}+\frac{1}{(x-4)(x-5)}+\frac{1}{(x-5)(x-6)}=\frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x-5}=\frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-6}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{8} \Rightarrow x^2-8x-20=0 \Leftrightarrow (x+2)(x-10)=0$$

$\Leftrightarrow x=-2$ hoặc $x=10$. Tập nghiệm $S=\{-2;10\}$

18.15. Giải phương trình $\dfrac{x(x^2-56)}{4-7x}-\dfrac{21x+22}{x^3+2}=4$

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, năm học 2014 - 2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

ĐKXĐ: $x \neq \dfrac{4}{7}$ và $x^3 \neq -2$

$$\frac{x(x^2-56)}{4-7x}-\frac{21x+22}{x^3+2}=4 \Leftrightarrow \frac{x(x^2-56)}{4-7x}-5+1-\frac{21x+22}{x^3+2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3-56x-20+35x}{4-7x}+\frac{x^3+2-21x-22}{x^3+2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^3-21x-20)\left(\frac{1}{4-7x}+\frac{1}{x^3+2}\right)$$

* Xét $x^3-21x-20=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-5)(x+4)=0$ ta tìm được: $x=-4; x=-1; x=5$ thỏa mãn ĐKXĐ.

* Xét $\dfrac{1}{4-7x}+\dfrac{1}{x^3+2}=0$ biến đổi thành $x^3-7x+6=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x+3)=0$ ta tìm được $x=-3; x=1; x=2$ thỏa mãn ĐKXĐ.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{-4;-3;-1;1;2;5\}$

18.16. Giải phương trình $\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2}{x+1}=\frac{2x}{x^2-1}$

(Đề thi chọn đội tuyển Toán 9 huyện Thường Tín - Hà Nội, năm học 2014 - 2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

ĐKXĐ: $x \neq \pm 1$.

$$\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2}{x+1}=\frac{2x}{x^2-1} \Rightarrow x^2(x+1)-x^2(x-1)=2x \Leftrightarrow 2x^2-2x=0$$

$\Leftrightarrow 2x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1$. Loại $x=1$

Tập nghiệm $S=\{0\}$...

18.17. Giải phương trình $\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}=2$

(Đề thi chọn đội tuyển Toán 9 quận Gò vấp TP Hồ Chỉ Minh, năm học 2014 - 2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

ĐKXĐ: $x \neq 0$ và $x \neq -1$.

$$\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}=2 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}-1=1-\frac{3}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x^2}=\frac{x^2-x}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \frac{(1-x)\left[(1+x)^3+x^3\right]}{x^2(x+1)^2}=0$$

Với $x \neq 0$ và $x \neq -1$ thì $(1-x)\left[(1+x)^3+x^3\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-x=0\\(1+x)^3+x^3=0\end{array}\right.$

* Với $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ thỏa mãn ĐKXĐ.
* Với $(1+x^3)+x^3=0 \Leftrightarrow (1+x)^3=-x^3 \Leftrightarrow 1+x=-x \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ thỏa mãn ĐKXĐ.

Tập nghiệm là $S=\left\{-\frac{1}{2};1\right\}$

18.18. Giải phương trình $\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+2}+\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x+3}=\frac{7}{6}$

(Khảo sát chất lượng học sinh giỏi Toán 8 huyện Thường Tín - Hà Nội, năm học 2014 - 2015).

Hướng dẫn giải – đáp số

ĐKXĐ: $\forall x \in \mathbb{R}$

Đặt: $x^2-2x+2=t>0$. Phương trình trở thành $\frac{t-1}{t}+\frac{t}{t+1}=\frac{7}{6}$

$\Rightarrow 5t^2-7t-6=0 \Leftrightarrow (t-2)(5t+3)=0 \Leftrightarrow t=2\ \left(do\ \text{t}>0\right)$

Hay $x^2-2x+2=2 \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=2$.

Tập nghiệm là $S=\{0;2\}$

Chuyên đề 19. GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

A. Kiến thức cần nhớ

Bước 1: Lập phương trình:

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số;
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết;
- Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2: Giải phương trình.

Bước 3: Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thỏa mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Quãng đường AD gồm ba đoạn AB; BC và CD. Lúc 7 giờ sáng một người đi ô tô từ A với vận tốc 60km/h đến B lúc 7giờ 30phút, sau đó đi tiếp trên đoạn đường BC vận tốc 50km/h. Cùng lúc 7 giờ sáng một người đi xe máy đi từ C với vận tốc 35km/h để đến D. Biết thời gian người đi xe máy đến D nhiều hơn thời gian người đi ô tô từ B đến c là 1 giờ 24 phút và quãng đường BC ngắn hơn quãng đường CD là 40km. Tính quãng đường AD.

* *Tìm cách giải:* Đây là bài toán chuyển động đều. Có ba đại lượng: ***Quảng đường (s), vận tốc (v) và thời gian (t). Quan hệ giữa các đại lượng như sau:*** $s = v.t; v = s : t; t = s : v$.

Đoạn đường AD gồm ba đoạn. Đoạn AB đã biết độ dài (do biết vận tốc đi 60km/h và thời gian đi là 0,5 giờ) nên chỉ cần tính đoạn BD. Do đó ta chọn ẩn sổ x (km) là độ dài đoạn BD.

Do quãng đường BC ngắn hơn quãng đường CD là 40km mà tổng hai đoạn đường là x km nên độ dài đoạn CD là $\dfrac{x+40}{2}$ km và BC là $\dfrac{x-40}{x}$ km.

Ta phải tìm thời gian đi của xe máy trên đoạn đường CD và thời gian ô tô đi trên đoạn đường BC để lập phương trình.

Giải

Thời gian xe đi hết quãng đường AB là 7 giờ 30 phút - 7 giờ = 30 phút = 0,5 h. Ta có quãng đường AB dài là 60. 0,5 = 30(km).

Gọi quãng đường BD là x(km); x > 40. Do đoạn CD dài hơn BC là 40km; tổng hai đoạn đường là x (km) nên:

1

- Đoạn đường BC dài $\dfrac{x-40}{x}$ (km); đoạn đường CD dài $\dfrac{x+40}{2}$(km)
- Thời gian ô tô đi trên đoạn BC là $\dfrac{x-40}{x} : 50$ (h).
- Thời gian ô tô đi trên đoạn CD là $\dfrac{x+40}{2} : 35$ (h).

1 giờ 24 phút = 1,4 giờ

Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{x+40}{70}-\frac{x-40}{100}=1,4 \quad (1)$

- Giải phương trình:

$(1) \Leftrightarrow 10x+400-7x+280=980 \Leftrightarrow 3x=300$

$\Leftrightarrow x=100$

Giá trị này phù hợp với điều kiện của ẩn vậy:

Quãng đường BD dài 100 km và quãng đường AD dài 100 + 30 = 130 (km).

Chú ý: Cách khác: Gọi thời gian xe máy đi từ C đến D là x (giờ) thì thời gian ô tô đi từ B đến C là $x-1,4$ (giờ). Quãng đường CD dài 35x (km), quãng đường BC dài $(x-1,4).50$. Ta có phương trình $(x-1,4).50=35x-40$

Giải phương trình được x = 2 (bạn đọc tính tiếp).

Ví dụ 2. Trên quãng sông AB dài 48km, một ca nô xuôi từ A đến B rồi quay trở lại và đỗ tại một địa điểm C ở chính giữa A và B. Thời gian ca nô cả xuôi và ngược dòng hết tất cả 3 giờ 30 phút. Tính vận tốc riêng của ca nô biết rằng một bè nứa thả trôi trên sông đó 15 phút trôi được 1 km.

* *Tìm cách giải:* - Đây là bài toán chuyển động đều liên quan đến chuyển động xuôi, ngược dòng nước (hoặc xuôi gió, ngược gió). ***Nếu gọi vận tốc khi xuôi là v_x; vận tốc khi ngược là v_n ; vận tốc riêng của động cơ là v_r và là vận tốc của dòng nước (hoặc gió) thì*** $v_x=v_r+v_{dn}; v_n=v_r-v_{dn}$ ***và*** $v_x-v_n=2v_{dn}$ **.**

- Quãng sông ca nô xuôi là 48km và ngược là 48: 2 = 24km. Vận tốc bè nứa trôi chính là vận tốc dòng nước.
- Chọn ẩn số x là vận tốc riêng của ca nô, ta tìm thời gian xuôi và ngược để lập phương trình.

Giải

15 phút = 0,25 giờ; 3 giờ 30 phút = 3,5 giờ.

Vận tốc bè nứa trôi là 1: 0,25 = 4 (km/h) chính là vận tốc dòng nước.

Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/h); x > 4. Thì vận tốc ca nô khi xuôi dòng là x + 4 (km/h), vận tốc ca nô khi ngược dòng là x - 4 (km/h).

Thời gian ca nô xuôi dòng là $\frac{48}{x+4}$ (h) và ngược dòng là $\frac{24}{x-4}$ (h). 2

Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{48}{x+4}+\frac{24}{x-4}=3,5 \quad (1)$

* Giải phương trình (1): biến đổi thành $48x-192+24x+96=3,5x^2-56$

$\Leftrightarrow 3,5x^2-72x+40=0 \Leftrightarrow 7x^2-144x+80=0$

$$\Leftrightarrow 7x^2 - 14x - 4x + 80 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(7x-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 20 \\ x = \dfrac{4}{7} \end{array}\right.$$

Trong hai giá trị trên x = 20 thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 20km/h.

Ví dụ 3. Hai xưởng sản xuất cùng làm một sản phẩm, số sản phẩm xưởng thứ nhất làm trong 5 ngày nhiều hơn số sản phẩm xưởng thứ hai làm trong 6 ngày là 140 sản phẩm. Biết rằng năng suất lao động của xưởng thứ nhất hơn xưởng thứ hai là 65 sản phẩm/ngày. Tính năng suất lao động của mỗi xưởng.

* *Tìm cách giải:* Bài toán thuộc loại toán Năng suất lao động. Có ba đại lượng:

– ***Khối lượng công việc: (K)***

– ***Thời gian hoàn thành công việc (t)***

– ***Năng suất lao động: (lượng công việc hoàn thành trong một đơn vị thời gian) (N).***

Quan hệ giữa các dại lượng như sau:

K = Nt; t = K : N và N = K: t.

Trong bài năng suất lao động mỗi xưởng là số sản phẩm mỗi xưởng làm trong một ngày, ta chọn ẩn X từ một trong hai năng suất lao động này. Khối lượng công việc của mỗi xưởng chính là số sản phẩm xưởng thứ nhất làm trong 5 ngày, xưởng thứ hai làm trong 6 ngày. Lập phương trình từ việc so sánh hai khối lượng công việc.

Giải

Gọi năng suất lao động của xưởng thứ nhất là x (sản phẩm /ngày); ($x \in \mathbb{N}$; x > 65) thì năng suất lao động của xưởng thứ hai là $(x-65)$ (sản phẩm/ngày). Trong năm ngày xưởng thứ nhất làm được 5x (sản phẩm), trong sáu ngày xưởng thứ hai làm được $6(x-65)$ (sản phẩm).

Theo bài ra ta có phương trình: $x - 6(x-65) = 140$. (1)

Giải phương trình: (1) $\Leftrightarrow 5x - 6x + 390 = 140$

$\Leftrightarrow x = 250$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy: Năng suất lao động của xưởng thứ nhất là 250 sản phẩm /ngày

Năng suất lao động của xưởng thứ hai là 250 - 65 = 185 (sản phẩm /ngày).

Ví dụ 4. Hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể cạn trong thời gian 4 giờ 48 phút thì bể đầy. Nếu vòi thứ nhất chảy một mình trong 3 giờ, rồi vòi thứ hai chảy tiếp một mình trong 4 giờ nữa thì đầy được $\dfrac{17}{24}$ bể. Hỏi nêu mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu bể sẽ đầy?

* *Tìm cách giải.* - Đây là bài toán về công việc đồng thời (làm chung, làm riêng một công việc) - là một dạng đặc biệt của toán năng suất lao động. Khối lượng công việc ở đây không được cho dưới dạng số lượng cụ thể là bao nhiêu. Bởi vậy ta có thể quy ước công việc cần hoàn thành là 1. Tùy nội dung bài toán cụ

thể mà ta quy ước một đại lượng nào đó làm đơn vị (1 bể nước, 1 con mương, 1 cánh đồng, 1 con đường, ...). Đơn vị của năng suất lao động sẽ là 1 công việc / 1 đơn vị thời gian. Năng suất lao động chung bằng tổng năng suất lao động riêng của từng cá thể.

- Ở bài toán trên, công việc cụ thể là 1 bể nước (lượng nước làm đầy 1 bể). Nếu một vòi chảy một mình sau a giờ đầy bể thì năng suất (lượng nước chảy trong 1 giờ) là $\frac{1}{a}$ bể/giờ. Nếu một vòi khác chảy một mình sau b giờ đầy bể thì năng suất là $\frac{1}{b}$ bể/giờ. Năng suất chung là $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ (bể/giờ).

Giải

Hai vòi chảy chung trong 4 giờ 48 phút = $\frac{24}{5}$ giờ đầy bể vậy 1 giờ hai vòi chảy chung được $\frac{5}{24}$ bể nước.

Gọi thời gian vòi thứ hai chảy một mình đầy bể là x giờ $\left(x>\frac{24}{5}\right)$, thì 1 giờ vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{x}$ bể nước

Vòi thứ nhất chảy một mình 1 giờ được $\left(\frac{5}{24}-\frac{1}{x}\right)$ bể nước.

Ta có phương trình $3\left(\frac{5}{24}-\frac{1}{x}\right)+\frac{4}{x}=\frac{17}{24} \quad (1)$

Giải phương trình: (1) $\Leftrightarrow 15x-72+96=17x \Leftrightarrow 2x=24 \Leftrightarrow x=12$.

Giá trị này phù hợp với điều kiện của ẩn.

Vậy thời gian vòi thứ hai chảy một mình đầy bể là 12 giờ.

Thời gian vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể là $1:\left(\frac{5}{24}-\frac{1}{12}\right)=1:\frac{1}{8}=8$ (giờ).

Ví dụ 5. Năm ngoái sô kg thóc thu hoạch của thửa ruộng thứ nhất bằng $\frac{3}{4}$ số kg thóc thu hoạch của thửa thứ hai. Năm nay nhờ cải tiến kỹ thuật thửa thứ nhất thu hoạch tăng 20%; thửa thứ hai thu hoạch tăng 30% do đó cả hai thửa thu hoạch được 1320kg. Tìm số tạ thóc mỗi thửa thu hoạch trong năm nay.

* *Tìm cách giải:* Đây là dạng toán liên quan đến tỷ số và tỷ số %. Thu hoạch tăng a% tức là đã thu hoạch được (100 + a)%. Ta phải tìm số thóc mỗi thửa thu hoạch trong năm nay. Ẩn số ta nên chọn là số thóc thu hoạch của một trong hai thửa năm trước vì các đại lượng quan hệ: tỷ số giữa số thóc thu hoạch của hai thửa ruộng là của năm trước và tỷ số % tăng là so với năm trước.

Giải

Gọi số thóc thu hoạch năm ngoái của thửa thứ hai là x (kg) (x > 0)

Số thóc thu hoạch năm ngoái của thửa thứ nhất là $\frac{3}{4}x$ (kg)

Số thóc thu hoạch năm nay của thửa thứ hai là 130% x (kg)

Số thóc thu hoạch năm nay của thửa thứ nhất $120\%.\frac{3}{4}x$ (kg)

Theo bài ra ta có phương trình: $120\%.\frac{3}{4}x+130\%x=1320\quad(1)$

Giải phương trình: $(1)\Leftrightarrow\frac{120}{100}.\frac{3}{4}.x+\frac{130}{100}x=1320$

$\Leftrightarrow 9x+13x=13200\Leftrightarrow 22x=13200\Leftrightarrow x=600$

Giá trị này của x thỏa mãn điều kiện của ẩn. Vậy số thóc thửa thứ hai thu hoạch trong năm nay là 130%.600 = 780 (kg) = 7,8 (tạ), số thóc thửa thứ nhất thu hoạch trong năm nay là 1320 - 780 = 540 (kg) = 5,4(tạ).

Chú ý: Ta có thể chọn x là số thóc thu hoạch năm nay của thửa thứ nhất. Khi đó ta có phương trình:

$$\frac{x.100}{120}=\frac{3}{4}.\frac{(1320-x).100}{130}$$

Giải được x = 540 (bạn đọc tự giải).

Ví dụ 6. Một số có bốn chữ số có chữ số hàng đơn vị là 5. Nên chuyển chữ số 5 lên đầu và giữ nguyên ba chữ số còn lại thì được số mới lớn hơn số ban đầu là 3222 đơn vị. Tìm số có 4 chữ số đó.

* *Tìm cách giải:* Bài toán liên quan đến cấu tạo số.

Số có 4 chữ số $\overline{abcd}\left(a,b,c,d\in\mathbb{N};0<a\le 9;0\le b,c,d\le 9\right)$ có khai triển $\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d=1000a+\overline{bcd}=\overline{abc}.10+d$. Chuyển d lên đầu được số $\overline{dabc}=1000d+\overline{abc}$. Trong bài do các chữ số $\overline{abc}$ không thay đổi thứ tự sắp xếp nên ta có thể chọn làm ẩn số x.

Giải

Gọi số có ba chữ số trước chữ số hàng đơn vị là x $\left(x\in\mathbb{N};100\le x<1000\right)$

Số cần tìm là $\overline{x5}$. Chuyển chữ số 5 lên đầu ta được số $\overline{5x}$.

Ta có phương trình $\overline{5x}-\overline{x5}=3222$. (1)

Giải phương trình: (1) $\Leftrightarrow 5000+x-10x-5=3222$

$\Leftrightarrow 9x=1773\Leftrightarrow x=197$

Giá trị này thỏa mãn điều kiện của ẩn. Vậy số phải tìm là 1975.

Ví dụ 7. Khối 8 của một trường THCS có ba lớp 8A; 8B và 8C. Tổng số học sinh ba lớp là 120 em. Nếu chuyển 3 em từ lớp 8A sang lớp 8B thì số học sinh của hai lớp bằng nhau, số học sinh 8C bằng trung bình cộng số học sinh hai lớp 8A và 8B. Tìm số học sinh ban đầu của mỗi lớp.

* *Tìm cách giải:* Chuyển 3 em từ lớp 8A sang lóp 8B thì số học sinh của hai lớp bằng nhau nghĩa là sổ học sinh lớp 8A hơn số học sinh lớp 8B là 6.

Giải

Gọi số học sinh ban đầu của 8A là x $\left(x \in \mathbb{N}^*, x < 80\right)$ suy ra số học sinh lớp 8B là $x-6$ và số học sinh lớp 8C là $\dfrac{x+x-6}{2} = x-3$

Theo bài ra ta có phương trình: $x + x - 6 + x - 3 = 120$ (1)

Giải phương trình: (1) $\Leftrightarrow 3x = 129 \Leftrightarrow x = 43$

Giá trị này của X thỏa mãn điều kiện của ẩn. Vậy:

Số học sinh lóp 8A là 43; số học sinh lớp 8B là 43 - 6 = 37;

Số học sinh lóp 8C là 43 - 3 = 40.

Ví dụ 8. Người ta dự định tổ chức một hội nghị gồm 300 đại biểu, số chỗ ngồi được xếp thành các hàng có số ghế mỗi hàng bằng nhau. Do hội nghị có thêm 23 đại biểu nên phải sắp xếp lại, mỗi hàng thêm 4 ghe, nhưng lại bớt đi 3 hàng. Tính số hàng và số ghế mỗi hàng theo dự định xếp ban đầu.

* *Tìm cách giải:* Bài toán có ba đại lượng: Tổng số chỗ ngồi (số ghế); số hàng ghế và số ghế mỗi hàng. Quan hệ của chúng là

Tổng số chỗ ngồi (số ghế) = số hàng ghế x số ghế mỗi hàng.

Số hàng ghế = Tổng số chỗ ngồi (số ghế): số ghế mỗi hàng.

Số ghế mỗi hàng = Tổng số chỗ ngồi (số ghế): số hàng ghế.

Đã biết số đại biểu (tức là số ghế cần sắp xếp), ta chọn một trong hai đại lượng số hàng ghế và số ghế mỗi hàng làm ẩn và dựa vào quan hệ giữa ba đại lượng lúc đầu và sau này để lập phương trình.

Giải

Gọi số hàng ghế dự định xếp ban đầu là x $\left(x \in \mathbb{N}, x > 3\right)$, thì số dãy ghế sau khi xếp lại là $x-3$

Số ghế mỗi hàng ban đầu là $\dfrac{300}{x}$(chiếc)

Số ghế mỗi hàng sau khi xếp lại là $\dfrac{300+23}{x-3}$(chiếc)

Theo bài ra ta có phương trình: $\dfrac{300}{x} + 4 = \dfrac{300+23}{x-3}$ (1)

Giải phương trình: (1) $\Rightarrow 300x - 900 + 4x^2 - 12x - 323x = 0$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 35x - 900 = 0 \Leftrightarrow \left(x-20\right)\left(x+45\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-20=0 \\ 4x+45=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=20 \\ x=-\dfrac{45}{4} \end{array}\right.$

Ta thấy x = 20 thỏa mãn điều kiện của ẩn, vậy:

Số hàng ghế ban đầu là 20; số ghế mỗi hàng ban đầu là 300: 20 = 15.

Ví dụ 9. Biết 445g đồng có thể tích 50cm^3; 175g kẽm có thể tích 25cm^3. Một hợp kim đồng và kẽm nặng 1,4kg có thể tích 181 cm^3. Tính khối lượng đồng và kẽm trong hợp kim.

* *Tìm cách giải:* Bài toán có nội dung Vật lý. Có ba đại lượng: Khối lượng (m); khối lượng riêng (D) và thể tích (V). Khối lượng riêng là khối lượng của một đơn vị thể tích. Quan hệ giữa ba đại lượng là:

D = m: V; m = D.V; V = m:D

Bài toán yêu cầu tìm khối lượng đồng, khối lượng kẽm có trong hợp kim. Khối lượng hợp kim là tổng khối lượng đồng và kẽm. Thể tích hợp kim là tổng thể tích của khối đồng và kẽm. Ta chọn một trong hai khối lượng đồng hoặc kẽm làm ẩn.

Giải

Khối lượng riêng của đồng là: 445: 50 = 8,9 (g/cm^3);

Khối lượng riêng của kẽm là: 175: 25 = 7 (g/cm^3); 1,4kg = 1400g.

Gọi khối lượng đồng trong hợp kim là x g (x < 1400) thì khối lượng kẽm trong hợp kim là $(1400-x)$g

Thể tích của đồng là $\dfrac{x}{8,9}$(cm^3); Thể tích của kẽm là $\dfrac{1400-x}{7}$(cm^3);

Theo bài ra ta có phương trình: $\dfrac{x}{8,9}+\dfrac{1400-x}{7}=181 \quad (1)$

Giải phương trình: (1) $\Leftrightarrow 7x+12460-8,9x=11276,3$.

$\Leftrightarrow -1,9x=-1183,7 \Leftrightarrow x=623$

- Giá trị này của x thỏa mãn điều kiện của ẩn.

Vậy khối lượng đồng là 623 g và kẽm là 1400 - 623 = 777 (g).

Ví dụ 10. Khối 8 một trường THCS có số lớp nhiều hơn 2, tổ chức trồng cây:

Lớp thứ nhất trồng 5 cây và $\dfrac{1}{5}$ số cây còn lại.

Lớp thứ hai trồng tiếp 10 cây và $\dfrac{1}{5}$ số cây còn lại.

Lớp thứ ba trồng tiếp 15 cây và $\dfrac{1}{5}$ số cây còn lại.

Cứ trồng như vậy đến lớp cuối cùng thì vừa hết số cây và số cây mỗi lớp trồng được là bằng nhau. Tính số cây mà khối 8 trồng và số lớp 8 của khối tham gia trồng cây.

Tìm cách giải. Đây là một bài toán hay và khó. Cách phân bổ cây trồng:

Lớpthứ nhất trồng 5 cây và $\frac{1}{5}$ số cây còn lại. Lóp thứ hai trồng tiếp 5.2 cây và $\frac{1}{5}$cây còn lại. Lớp thứ ba trồng tiếp 5.3 và $\frac{1}{5}$ số cây và số cây còn lại... Ta lưu ý lớp cuối cùng thì vừa hết số cây và đặc biệt số cây mỗi lóp trồng được là bằng nhau. Vì vậy ta chọn ẩn x là toàn bộ số cây mà khối 8 trồng và chỉ cần tìm số cây lóp thứ nhất trồng, số cây lớp thứ hai trồng là có phương trình.

Giải

Gọi tổng số cây khối 8 trồng là: x cây; $\left(x \in \mathbb{N}^*\right)$

Số cây lớp thứ nhất trồng là: $5+\frac{1}{5}(x-5)=\frac{1}{5}x+4$ (cây)

Số cây còn lại sau khi lớp thứ nhất trồng : $x-\left(\frac{1}{5}x+4\right)=\frac{4}{5}x-4$ (cây)

Lớp thứ hai trồng là: $10+\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}x-4-10\right)=\frac{4}{25}x+\frac{36}{5}$

Do số cây mỗi lóp trồng bằng nhau nên ta có phương trình:

$$\frac{1}{5}x+4=\frac{4}{25}x+\frac{36}{5} \quad (1)$$

Giải phương trình $(1) \Leftrightarrow \frac{1}{25}x=\frac{16}{5} \Leftrightarrow x=80$

Giá trị này thỏa mãn điều kiện của ẩn. Vậy so cây khối 8 trồng là 80 cây.

Mỗi lớp trồng: $\frac{1}{5}.80+4=20$ (cây)

$\Rightarrow$ Số lớp 8 tham gia trồng cây: 80: 20 = 4 (lớp)

* *Nhận xét:* Ta còn cách giải khác đơn giản hơn:

8

Gọi số lớp 8 tham gia trồng cây là y $\left(y \in \mathbb{N}; y>2\right)$. Do lớp cuối cùng trồng hết số cây nên lớp cuối cùng trồng được 5y + 0 (cây). Do số cây mỗi lóp trồng như nhau nên mỗi lóp đều trồng 5y cây và y lớp trồng tất cà cây.

Số cây lớp thứ nhất trồng là $5+\frac{5y^2-5}{5}=y^2+4$

Ta có phương trình $y^2+4=5y \Leftrightarrow y^2-5y+4=0$

$\Leftrightarrow (y-4)(y-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=4 \\ y=1 \end{array}\right.$

Trong hai giá trị có y = 4 thỏa mãn điều kiện của ẩn. Vậy số lớp 8 tham gia trồng cây là 4 và số cây khối 8 trồng là 5. 4^2 = 80 (cây).

C. Bài tập vận đụng

Dạng toán chuyển động đều

19.1. Lúc 7 giờ sáng một người đi xe máy khởi hành từ A dể đến B. Lúc 7 giờ 10 phút một ô tô khởi hành từ A với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe máy là 10km/h. Trên đường ô tô phải dừng ở giữa đường 14 phút nhưng vẫn đến B cùng lúc với xe máy. Tính vận tốc của mỗi xe biết rằng cũng trên quãng đường AB một xe taxi đi với vận tốc 60km/h hết 1 giờ 20 phút.

Hướng dẫn giải – đáp số

Xe taxi đi 1 giờ 20 phút (bằng $\frac{4}{3}$ giờ) với vận tốc 60km/h. Ta tính được quãng đường AB. Xe ô tô khỏi hành sau 10 phút, nghỉ giữa đường 14 phút cùng đến B một lúc với xe máy. Như vậy xe máy đi chậm hơn ô tô $10+14=24$ (phút) = $\frac{2}{5}$ giờ. So sánh thời gian của ô tô và xe máy đi ta lập được phương trình. Ta có cách giải:

Quãng đường AB dài là $60.\frac{4}{3}=80\,(\text{km})$

Gọi vận tốc xe máy là x km/h (x > 0), thì vận tốc ô tô là (x + 10) km/h.

Thời gian xe máy đi hết quãng đường AB là $\frac{80}{x}$ (h); thời gian ô tô đi trên quãng

đường AB (không tính thời gian nghỉ) là $\frac{80}{x+10}$ (h).

Ta có phương trình: $\frac{80}{x}-\frac{80}{x+10}=\frac{2}{5}$ Giải phương trình được x = 40.

Vận tốc xe máy là 40 km/h và ô tô là 50km/h

19.2. Lúc 7 giờ sáng một ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ A đến B. Ô tô đi 1 giờ 30 phút được 75km. Vận tốc xe máy kém vận tốc ô tô là 10 km/h. Ô tô đi đến B nghỉ 6 phút sau đó quay trở lại A và gặp xe máy ở địa điểm C cách B một khoảng bằng $\frac{1}{10}$ AB. Tính đoạn đường AB và thời điểm hai xe gặp nhau.

Hướng dẫn giải – đáp số

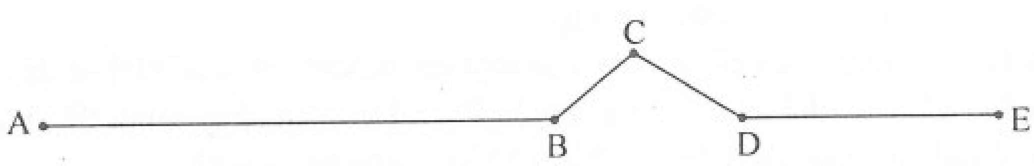
Thời gian xe máy đi trên đoạn đường AC bằng thời gian ô tô đi hết đoạn đường AB cộng với thời gian nghỉ và thời gian đi trên đoạn BC. Từ đó có cách giải sau: Vận tốc xe ô tô là 75: 1,5 = 50 (km/h); Vận tốc xe máy là 40 km/h; 6 phút = $\frac{1}{10}$ giờ. Gọi độ dài quãng đường AB là x km (x > 0) thì độ dài đoạn AC là $\frac{9}{10}x$ (km). Ta có phương trình: $\frac{x}{50}+\frac{1}{10}+\frac{x}{500}=\frac{9x}{400}$

Giải phương trình được x = 200 thỏa mãn điều kiện của ẩn.

Trả lời: Quãng đường AB dài 200km;

Thời điểm gặp nhau là $7+\frac{9.200}{400}=7+4,5=11,5$ (giờ) = 11 giờ 30 phút.

19.3. Từ bến A trên một dòng sông, lúc 8 giờ một chiếc thuyền xuôi dòng với vận tốc 10km/h. Lúc 9 giờ một ca nô xuôi dòng với vận tốc 25 km/h. Lúc 10 giờ một tàu thủy xuôi dòng với vận tốc 30km/h. Hỏi lúc mấy giờ thì tàu thủy cách đều ca nô và thuyền?



Hướng dẫn giải – đáp số

Lúc tàu thủy cách đều ca nô và thuyền 1 thì độ dài đoạn sông tàu thủy đi được trừ đi độ dài đoạn sông thuyền đi được bằng với độ dài sông ca nô đi được trừ đi độ dài đoạn sông mà tàu thủy đi được. Từ đó có cách giải sau:

Gọi thời gian tàu thủy đi từ A đến khi cách đều ca nô và thuyền là x giờ (x > 0).

Đến 10 giờ khi tàu thủy khởi hành thuyền đã đi được 20km và ca nô đã đi được 25km.

Ta có phương trình: $30x-(20+10x)=(25+25x)-30x$

Giải được $x=\frac{9}{5}$ thỏa mãn điều kiện của ẩn. ($\frac{9}{5}$ giờ = 1 giờ 48 phút)

Trả lời: Lúc 11 giờ 48 phút thì tàu thủy cách đều ca nô và thuyền

19.4.

Quãng đường AE gồm bốn đoạn, hai đoạn đường bằng AB và DE. Nếu đi từ A thì BC là đoạn lên dốc, CD là đoạn xuống dốc. Biết $AB=2DE; BC=\frac{3}{8}DE; DE=2CD$. Vận tốc ô tô đi trên đường bằng là 40km/h, lên dốc là 30km/h và xuống dốc là 60km/h. Thời gian đi từ A đến E rồi trở về A là 7 giờ 45 phút. Tính quãng đường AE.

Hướng dẫn giải – đáp số

Nếu từ E trở về thì DC là đoạn lên dốc, CB là đoạn xuống dốc. Vận tốc lên dốc cũng là 30km/h và xuống dốc cũng là 60km/h. Tổng thời gian cả đi lẫn về là 7 giờ 45 phút. Từ đó có cách giải:

Gọi quãng đường DE dài x km (x > 0) thì đoạn đường AB là 2x km; đoạn đường CB dài là $\frac{3}{8}$x km; đoạn CD = 0,5x.

Thời gian cả đi và về là 7 giờ 45 phút = $\frac{31}{4}$ giờ. Ta có phương trình:

$$\frac{3x}{40}+\frac{3x}{240}+\frac{x}{120}+\frac{3x}{40}+\frac{x}{60}+\frac{3x}{480}=\frac{31}{4}$$

Giải phương trình tìm được x = 40 thỏa mãn điều kiện của ẩn

Từ đó tìm được quãng đường AE dài 155km.

19.5. Một ca nô xuôi một dòng sông từ A đến B hết 3 giờ. Sau đó ca nô quay trở lại ngược từ B đến bến C nằm cách A một khoảng bằng $\frac{1}{3}$AB hết 2 giờ 24 phút. Tính độ dài của đoạn sông từ A đến B biết rằng một khóm bèo trôi trên đoạn sông đó 12 phút được 400m.

Hướng dẫn giải – đáp số

Vận tốc bèo trôi là vận tốc dòng nước. Nếu tính được vận tốc riêng của ca nô ta tính được độ dài quãng sông AB, nên ta chọn ẩn một cách gián tiếp. Ca nô ngược $\frac{2}{3}$ quãng sông AB hết 2 giờ 24 phút, ta tính được thời gian ca nô ngược hết quãng sông BA. Quãng sông AB cũng chính là BA, ta dựa vào đó để lập phương trình và có cách giải sau:

Vận tốc bèo trôi chính là vận tốc dòng nước. Ta có 12 phút = 0,2 giờ; 400 m = 0,4km. Vậy vận tốc dòng nước là 0,4: 0,2 = 2(km/h). Gọi vận tốc riêng của ca nô là x km/h (x > 2). Vận tốc của ca nô khi xuôi là $(x+2)$ km/h và khi ngược là $(x-2)$ km/h.

Ca nô ngược $\frac{2}{3}$ quãng sông AB hết 2 giờ 24 phút = 2,4 giờ vậy nếu cùng vận tốc ngược ca nô đi hết quãng sông AB hết (2,4: 2). 3 = 3,6 (giờ).

Theo bài ra ta có phương trình: $3(x+2)=3,6(x-2)$

Giải phương trình được x = 22 thỏa mãn điều kiện của ẩn.

Vậy quãng sông AB dài là 3.(22 + 2) = 72 (km).

* *Chú ý:* Cách khác: Ta biết $v_x - v_n = 2v_{dn}$ nên gọi quãng sông AB dài x km thì vận tốc ca nô xuôi là $\frac{x}{3}$ (km/h), vận tốc ca nô ngược là $\frac{2}{3}x:\frac{12}{5}=\frac{5x}{18}$ ta có phương trình $\frac{x}{3}-\frac{5x}{18}=4$. Giải được x = 72..

19.6. Một ô tô đi trên $\frac{1}{3}$ đoạn đường MN với vận tốc 60km/h. $\frac{2}{3}$ đoạn đường MN còn lại đi với vận tốc 40km/h. Tính vận tốc trung bình của ô tô trên cả đoạn đường.

Hướng dẫn giải – đáp số

Vận tốc trung bình của ô tô trên cả đoạn đường bàng độ dài đoạn đường chia cho thời gian ô tô đi hết đoạn đường. Thời gian ô tô đi hết đoạn đường bằng tổng thời gian ô tô đi từng phần đoạn đường. Ta có cách giải sau:

Ta đặt $\frac{1}{3}$ đoạn đường MN là a thì đoạn đường còn lại là 2a.

Đoạn đường MN là 3a. Gọi vận tốc trung bình của ô tô trên cả đoạn đường là x km/h (40 < x < 60) thì thòi gian ô tô đi hết đoạn đường là $\frac{3a}{x}$ (giờ)

Thòi gian ô tô đi $\frac{1}{3}$ đoạn đường MN đầu là $\frac{a}{60}$ (giờ).

Thời gian ô tô đi đoạn đường còn lại là $\frac{2a}{40}$(giờ).

Ta có phương trình: $\frac{a}{60}+\frac{2a}{40}=\frac{3a}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{60}+\frac{1}{20}=\frac{3}{x}$

Giải phương trình ta tìm được x = 45 thỏa mãn điều kiện của ẩn.

Vậy vận tốc trung bình của ô tô trên cả đoạn đường là 45 km/h

Dạng toán năng suất lao động.

19.7. Ba tổ sản xuất được giao làm một số sản phẩm, số sản phẩm của tổ II được giao gấp đôi tổ 1, số sản phẩm của tổ III được giao gấp đôi tổ II. Do cải tiến kỹ thuật nên tổ I sản xuất vượt mức 30% kế hoạch, tổ II sản xuất vượt mức 20% kế hoạch, tổ III sản xuất vượt mức 10% kế hoạch. Do đó số sản phẩm vượt mức kế hoạch của cả ba tổ là 220 sản phẩm. Tính số sản phẩm mỗi tổ được giao theo kế hoạch.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: Số sản phẩm vượt mức = Số % vượt mức x số sản phẩm theo kế hoạch.

Từ đó: Gọi số sản phẩm được giao của tổ I là x sản phẩm (x > 0) thì số sản phẩm được giao của tổ II là 2x sản phẩm, của tổ III là 4x sản phẩm.

- Số sản phẩm vượt mức của tổ I là 30%. x, của tổ II là 20%. 2x, của tổ III là 10%. 4x. Theo bài ra ta có phương trình: 30%x + 40% x + 40% x = 220

Giải phương trình được x = 200 thỏa mãn điều kiện của ẩn.

Vậy: Số sản phẩm được giao:

Tổ I: 200 sản phẩm; Tổ II: 400 sản phẩm; Tổ III: 800 sản phẩm.

19.8. Một xí nghiệp cơ khí được giao sản xuất 500 máy bơm nước trong một thời gian nhất định. Do cải tiến kỹ thuật tăng năng suất lao động, mỗi ngày xí nghiệp sản xuất thêm 5 máy bơm nên chẳng những xí nghiệp hoàn thành công việc sớm hơn 1 ngày mà còn sản xuất thêm được 70 máy bơm nữa. Hỏi số máy bơm dự định sản xuất trong một ngày và số ngày dự định theo kế hoạch ban đầu.

Hướng dẫn giải – đáp số

Số máy bơm sản xuất = Số máy bơm sản xuất 1 ngày x Số ngày sản xuất.

Từ đó: Gọi số máy bơm dự định sản xuất trong 1 ngày là x chiếc $\left(x \in N^*\right)$ thì số ngày dự định làm là $\frac{500}{x}$ (chiếc), số máy bơm thực làm được là 500 + 70 = 570 (chiếc). Số máy bơm thực sản xuất trong 1 ngày là x + 5 (chiếc), số ngày thực làm là $\frac{570}{x+5}$ (ngày). Ta có phương trình: $\frac{500}{x}=\frac{570}{x+5}+1$

Giải phương trình: $x^2+75x-2500=0 \Leftrightarrow (x-25)(x+100)\left[\begin{array}{l} x=25 \\ x=-100 \end{array}\right.$

Ta có x = 25 thỏa mãn điều kiện của ẩn.

Vậy Số máy bơm dự định sản xuất trong 1 ngày là 25 chiếc.

Số ngày dự định làm là $\frac{500}{25}=20$ (ngày)

19.9. Hai đội công nhân dự kiến làm một con đường sau 20 ngày thì xong. Hai đội làm chung trong 4 ngày rồi đội I chuyển sang làm việc khác. Đội II tiếp tục làm 10 ngày nữa thì được điều động đi làm việc khác. Đội 1 trở lại tiếp tục làm trong 28 ngày nữa thì xong con đường. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi đội làm trong bao nhiêu ngày sẽ xong con đường.

Hướng dẫn giải – đáp số

Đây là loại toán năng suất lao động, khối lượng công việc là 1 con đường.

Ta biết: *Khối lượng công việc (K) = Thời gian hoàn thành công việc (t)* x *Năng suất lao động (N)*

Đoạn đường hai đội làm chung 4 ngày cộng đoạn đường đội II làm 10 ngày tiếp và đoạn đường đội I trở lại làm 28 ngày chính là con đường cần làm. Ta có cách giải sau.

Hai đội làm chung 1 ngày được $\frac{1}{20}$ con đường. Gọi thời gian đội II làm một mình xong con đường là X ngày (x > 20). Thì 1 ngày đội II làm được $\frac{1}{x}$ con đường; đội I làm được $\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{x}\right)$ con đường.

Ta có phương trình: $\frac{4}{20}+\frac{10}{x}+28\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{x}\right)=1$

Giải phương trình tìm được x = 30 thỏa mãn điều kiện.

Vậy thời gian làm một mình xong con đường của đội II là 30 ngày. Từ đó tìm được thời gian làm một mình xong con đường của đội I là 60 ngày.

19.10. Hai vòi nước nếu cùng chảy vào một cái bể cạn sau 4 giờ bể sẽ đầy. Nhưng sau khi vòi thứ nhất chảy một mình 2 giờ, vòi thứ hai chảy mình tiếp theo 1 giờ thì cả hai vòi cùng chảy và sau 2 giờ 20 phút nữa bể mới đầy.

Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu bể sẽ đầy?

Hướng dẫn giải – đáp số

Khối lượng công việc cụ thể là 1 bể nước (lượng nước đầy 1 bể). Hai vòi cùng chảy 1 giờ được $\frac{1}{4}$ bể nước.

Nếu một vòi chảy một mình sau x giờ đầy bể thì lượng nước chảy trong 1 giờ là $\frac{1}{x}$ bể. Ta có lượng nước vòi 1 chảy trong 2 giờ + lượng nước vòi II chảy trong 1 giờ + lượng nước 2 vòi cùng chảy trong 2 giờ 20 phút = 1 (bể). Ta có cách giải sau:

* *Giải.* 2 giờ 20 phút = $\frac{7}{3}$ giờ. Một giờ hai vòi cùng chảy được $\frac{1}{4}$ bể.

Gọi thời gian vòi I chảy một mình đầy bể là x giờ (x > 4), một giờ vòi I chảy một mình được $\frac{1}{x}$ bể; một giờ vòi II chảy một mình được $\frac{1}{4}-\frac{1}{x}$ bể;

Ta có phương trình $\frac{2}{x}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{x}\right)+\frac{7}{3}.\frac{1}{4}=1$

Giải phương trình tìm được x = 6 thỏa mãn điều kiện.

Đáp số: Thòi gian chảy một mình đầy bể của vòi I là 6 giờ, vòi II là 12 giờ.

19.11. Một bể nước có hai vòi nước chảy vào và một vòi chảy ra ở $\frac{1}{3}$ bể kể từ đáy.Vòi I chảy vào một mình sau 4 giờ bể sẽ đầy. Vòi III chảy ra mỗi giờ mất $\frac{1}{12}$ lượng nước trong bể. Lúc đầu bể cạn, mở cả ba vòi thì sau 2 giờ 48 phút bể sẽ đầy. Hỏi nếu vòi thứ hai chảy vào một mình thỉ sau bao lâu bể đầy?

Hướng dẫn giải – đáp số

Vòi III ở $\frac{1}{3}$ bể nước (từ đáy) nên lúc đầu hai vòi I và II cùng chảy để đầy $\frac{1}{3}$ bể nước. Sau đó 3 vòi cùng chảy đầy $\frac{2}{3}$ bể còn lại và lượng nước trong bể được thêm sẽ bằng tổng lượng nước hai vòi chảy vào trừ đi lượng nước chảy ra. Thời gian hai vòi chảy đầy $\frac{1}{3}$ bể nước và thời gian ba vòi chảy đầy $\frac{1}{3}$ bể nước chính là

2 giờ 48 phút = $\frac{14}{5}$ giờ. Ta có cách giải sau.

Gọi thời gian vòi thứ hai chảy vào một mình đầy bể là x giờ (x > 0)

Suy ra 1 giờ vòi thứ hai chảy $\frac{1}{x}$ bể. Một giờ vòi I chảy một mình được $\frac{1}{4}$ bể.

Một giờ hai vòi cùng chảy được $\frac{1}{4}+\frac{1}{x}$ bể.

Ba vòi cùng chảy một giờ lượng nước trong bể còn $\frac{1}{4}+\frac{1}{x}-\frac{1}{12}=\frac{1}{6}+\frac{1}{x}$

Ta có phương trình : $\frac{1}{3}:\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{x}\right)+\frac{2}{3}:\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{x}\right)=\frac{14}{5}$

Giải phương trình ta sẽ có: $19x^2-30x-504=0 \Leftrightarrow (x-6)(19x+84)=0$

Tìm được x = 6 thỏa mãn điều kiện.

Vậy thời gian chảy một mình đầy bể của vòi II là 6 giờ.

Dạng toán có nội dung số học - Toán cổ

19.12.Một số có hai chữ số, chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàngđơn vị là 3 đơn vị. Nếu đổi chỗ hai chữ số được số mới lớn hơn $\frac{1}{3}$ số ban đầu là 37 đơn vị.Tìm số đã cho.

Hướng dẫn giải – đáp số

Bài toán liên quan đến cấu tạo số. Số có hai chữ số là $\overline{ab}=10a+b$; Đổi chỗ được số $\overline{ba}=10b+a$ với $a,b\in\mathbb{N};0<a\le 9;0\le b\le 9$) . Ta có cách giải:

Gọi chữ số hàng chục là x $\left(x\in\mathbb{N};3<x\le 9\right)$ thì chữ số hàng đơn vị là $(x-3)$.

Số đã cho: $\overline{x(x-3)}=10x+(x-3)$; Đổi chỗ các chữ số: $\overline{(x-3)x}=10(x-3)+x$

Ta có phương trình $10(x-3)+x-\frac{10x+(x-3)}{3}=37$

Giải phương trình được x = 9 phù hợp điều kiện của ẩn. Số cần tìm là 96

19.13. Một số có bốn chữ số có chữ số hàng đơn vị là 6. Nếu chuyển 6 lên đầu được số có 4 chữ số mới. Tổng của hai số có 4 chữ số này là 8217. Tìm số đã cho.

Hướng dẫn giải – đáp số

Bài toán liên quan đến cấu tạo số. Số có bốn chữ số mà chữ số hàng đơn vị là 6 là $\overline{abc6}=10.\overline{abc}+6$.

Chuyển 6 lên đầu được số $\overline{6abc}=6000+\overline{abc}$ với $a,b,c\in\mathbb{N};0<a\le 9;0\le b,c\le 9$). Từ đó có cách giải: Gọi số có ba chữ số đứng trước số 6 là x $\left(x\in\mathbb{N};99<x<1000\right)$ thì số đã cho là $\overline{x6}=10x+6$.

Chuyển 6 lên đầu được số $\overline{6x} = 6000 + x$

Ta có phương trình $10x + 6 + 6000 + x = 8217$

Giải phương trình được x = 201 phù hợp điều kiện của ẩn

Số cần tìm là 2016.

19.14. Tổng 4 số là 720. Nếu lấy số thứ nhất cộng 5, số thứ hai trừ 5, số thứ ba nhân 5 và số thứ tư chia 5 thì cả 4 kết quả bằng nhau. Tìm 4 số đó.

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi kết quả sau khi biến đổi của bốn số là x $\left(x \in \mathbb{R}\right)$ thì: Số thứ nhất là $x - 5$.

Số thứ hai là $x + 5$. Số thứ ba là x : 5. Số thứ tư là x. 5

Ta có phương trình $\left(x-5\right)+\left(x+5\right)+x:5+x.5=720$

Giải phương trình được x = 100 thỏa mãn điều kiện của ẩn.

Vậy số thứ nhất là 95; số thứ hai lả 105; số thứ ba là 20; số thứ tư là 500

19.15. Bài toán cổ:

Một đàn em nhỏ đứng bên sông
To nhỏ bàn nhau chuyện chia bòng
Mỗi người năm quả thừa năm quả
Mỗi người sáu quả một người không
Hỏi người bạn trẻ đang dừng bước
Có mấy em thơ, mấy quả bòng.

Hướng dẫn giải – đáp số

Số em được chia ở cách chia thứ hai ít hơn số em được chia ở cách chia thứ nhất là 1 em. Từ đó có cách giải:

Gọi x là số quả bòng đem chia, số em được chia ở cách thứ nhất là $\dfrac{x-5}{5}$ em.

số em được chia ở cách thứ hai là $\dfrac{x}{6}$. Ta có phương trình $\dfrac{x-5}{5}-\dfrac{x}{6}=1$

Giải phương trình được x = 60 (quả bòng) và số trẻ là 11 em.

Dạng toán có nội dung Hình học, Lý, Hóa

19.16. Chu vi một thửa ruộng hình chữ nhật là 200m. Nếu giảm chiều dài 10m và tăng chiều rộng 4m thì diện tích giảm đi 200m^2. Tính kích thước của thửa ruộng đó.

Hướng dẫn giải – đáp số

Với hình chữ nhật: Chu vi = (dài + rộng) x 2;

Diện tích = dài x rộng. Diện tích cũ - diện tích mới = 200 m^2. Ta có cách giải:

Nửa chu vi là 100m. Gọi chiều dài thửa ruộng là x (m); (0 < x < 100) thì chiều rộng là $(100-x)$ (m).

Chiều dài sau khi giảm là $(x-10)$ (m), chiều rộng sau khi tăng là $100-x+4=104-x$ (m).

Ta có phương trình: $x.(100-x)-(x-10).(104-x)=200$

Giải phương trình được x = 60 thỏa mãn điều kiện của ẩn.

Vậy thửa ruộng có chiều dài là 60m, chiều rộng là 40m.

19.17. Sau khi kéo dài bán kính của một đường tròn thêm 5cm thì được một đường tròn mới. Tổng chu vi đường tròn mới và đường tròn ban đầu bằng chu vi của một đường tròn có đường kính 90cm. Tìm bán kính đường tròn ban đầu.

Hướng dẫn giải – đáp số

Với đường tròn: Chu vi = Đường kính x π; Gọi bán kính đường tròn ban đầu là x cm (x > 0), thì bán kính sau khi kéo dài là $(x+5)$ (cm). Chu vi đường tròn ban đầu là $\pi.2x$ (m); Chu vi đường tròn sau là $\pi.2(x+5)$ (m); Ta có phương trình: $\pi.2x+\pi.2(x+5)=\pi.90 \Leftrightarrow 2x+2(x+5)=90$

Giải phương trình tìm được x = 20 thỏa mãn điều kiện của ẩn.

Vậy bán kính đường tròn ban đầu là 20 cm.

19.18. Hòa một khối lượng dung dịch NaCl loại I có nồng độ 30% với một khối lượng dung dịch NaCl loại II có nồng độ 25% được một l000g hỗn hợp dung dịch NaCI có nồng độ 27%. Tính khối lượng dung dịch NaCl mỗi loại.

Hướng dẫn giải – đáp số

Nồng độ phần trăm (C%) của một dung dịch là so gam chất tan chứa trong 100 gam dung dịch

$$C\%=\frac{m_{ct}}{m_{dd}}.100\%$$

Khối lượng NaCl trong dung dịch loại 1 + Khối lượng NaCl trong dung dịch loại II = Khối lượng NaCl trong 1000 gam dung dịch nồng độ 27%. Ta có cách giải: Gọi khối lượng dung dịch NaCl loại I là x gam (0 < x < 1000) thì Gọi khối lượng dung dịch NaCl loại II là $(1000-\text{x})$ (gam).

Ta có phương trình: $30\%x+25\%(1000-\text{x})=27\%.1000$

Giải phương trình tìm được x = 400 thỏa mãn điều kiện của ẩn.

Vậy khối lượng dung dịch NaCl loại I là 400g; loại II là 600g.

19.19. Pha 10kg nước nóng ở nhiệt độ $90°C$ với 5kg nước ở $24°C$. Tìm nhiệt độ cuối cùng của nước (bỏ qua sự mất nhiệt)

Hướng dẫn giải – đáp số

Bài toán liên quan đến việc tìm nhiệt lượng tỏa ra, thu vào của nước theo công thức $Q_{tỏa} = C.m\left(t_2 - t_1\right)$ và $Q_{thu} = C.m\left(t_1 - t_2\right)$ với C là nhiệt dung riêng của nước, m là khối lượng của nước. Nhiệt lượng tỏa ra của 10kg nước ở $90°C$ bằng nhiệt lượng thu vào của 5kg nước ở $24°C$. Ta có cách giải: Gọi t (độ C) là nhiệt độ cuối cùng của nước sau khi pha (24 < t < 90). Nhiệt lượng tỏa ra của 10kg nước ở $90°C$ là $C.10\left(90 - t\right)$ (J) và nhiệt lượng thu vào của 5kg nước ở $24°C$ là $C.5\left(t - 24\right)$ (J)

Ta có phương trình $C.10\left(90 - t\right) = C.5\left(t - 24\right) \Leftrightarrow 10\left(90 - t\right) = 5\left(t - 24\right)$

Giải phương trình được t = 68 thỏa mãn điều kiện của ẩn.

Vậy nhiệt độ cuối cùng sau khi hòa của nước là $68°C$

Dạng toán tổng hợp, toán nâng cao

19.20. 100 gà, vịt, thỏ, chó

Vừa đủ 290 chân

Số vịt bằng số thỏ

Số thỏ bằng nửa số chó.

Hỏi mấy vịt, mấy gà

Và mấy chó, mấy thỏ?

Hướng dẫn giải – đáp số

Một đại lượng bài toán không cho nhưng coi như đã biết, đó là gà và vịt đều có 2 chân; chó và thỏ đều có 4 chân.

Số vịt + số gà + số thỏ + số chó = 290

Số chân vịt + số chân gà + số chân thỏ + số chân chó = 290. Ta có cách giải:

Gọi số vịt là x con (0 < x < 100) thì số thỏ là x con, số chó là 2x con, số gà là $100 - 4x$ (con). Ta có phương trình:

$$2x + 4x + 8x + 2\left(100 - 4x\right) = 290$$

Giải phương trình được x = 15 thỏa mãn điều kiện của ẩn.

Vậy số vịt là 15 con; số gà là 40 con; số thỏ là 15 con; số chó là 30 con.

19.21. Cha hơn con 30 tuổi. Trước đây 4 năm tuổi cha gấp 4 tuổi con.

a) Tìm tuổi cha và tuổi con hiện nay?

b) Cách đây (trước hoặc sau) mấy năm tuổi cha gấp 2,5 lần tuổi con?

Hướng dẫn giải – đáp số

Trong bài toán tính tuổi, khi cha thêm 1 tuổi thì con cũng thêm một tuổi nên hiệu giữa tuổi cha và con luôn không đổi. Ta có cách giải:

a) Gọi tuổi con hiện nay là x (tuổi; x > 0) thì tuổi cha hiện nay là x + 30.

Trước đây 4 năm tuổi con là và tuổi cha là $x + 30 - 4 = x + 26$.

Ta có phương trình: $x+26=4(x-4)$

Giải phương trình được x = 14 thỏa mãn điều kiện của ẩn.

Vậy tuổi con hiện nay là 14 và tuổi cha là 44.

b) Gọi y là tuổi con lúc tuổi cha gấp 2,5 tuổi con (y > 0), do cha luôn hơn con 30 tuổi nên tuổi cha lúc ấy là y + 30.

Ta có phương trình: y + 30 = 2,5y

Giải phương trình tìm được y = 20 thỏa mãn điều kiện của ẩn.

Vậy sau đây 20 - 14 = 6 năm nữa thì tuổi cha gấp 2,5 lần tuổi con.

* *Ghi chú:* a) Có thể chọn ẩn gián tiếp là tuổi cha (hoặc con) khi tuổi cha gấp 4 lần tuổi con. (bạn đọc tự giải).

b) Nếu chọn z là số năm từ nay đến khi tuổi cha gấp 2,5 lần tuổi con (z > 0 là sau đây z năm, còn z < 0 là trước đây z năm). Ta có phương trình 2,5(14 + z) = 44 + z ta tìm được z = 6

19.22. Một người trồng quýt, sau khi thu hoạch để lại nhà 10 quả còn lại đem ra chợ bán. Lần thứ nhất bán 6 quả và $\frac{1}{6}$ số quả quýt còn lại. Lần thứ hai bán tiếp 12 quả và $\frac{1}{6}$ số quả quýt còn lại. Lần thứ ba bán tiếp 18 quả và $\frac{1}{6}$ số quả quýt còn lại. Cứ bán như vậy đến lần cuối cùng thì vừa hết số quýt và số quýt mỗi lớp trồng được là bằng nhau. Tính quýt mà người đó thu hoạch, số quýt mỗi lần bán và số lần bán.

Hướng dẫn giải – đáp số

Tương tự ví dụ 10. Đáp số: số quýt đem bán: 150 quả, số lần bán là 5 lần.

Số quýt thu hoạch: 160 quả

19.23. Một tấm tôn hình chữ nhật có chu vi bằng 114cm. Người ta cắt bỏ bốn hình vuông có cạnh là 5cm ở bốn góc rồi gấp lên thành một hình hộp chữ nhật (không có nắp).Tính các kích thước của tấm tôn đã cho. Biết rằng thể tích hình hộp bàng $1500cm^2$

(Thi học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Quảng Nam, năm học 2008 - 2009)

Hướng dẫn giải – đáp số

Nửa chu vi tấm tôn là 57cm. Gọi kích thước thứ nhất của tấm tôn là x (cm);

(10 < x < 57). Thì kích thước thứ hai là $57-x$ (cm).

Sau khi gấp thành hình hộp chữ nhật, ba kích thước của nó là

$x-10$(cm); $47-x$(cm); 5cm.

Ta có phương trình $(x-10)(47-x).5=1500 \Leftrightarrow x^2-57x+770=0$

$\Leftrightarrow (x-35)(x-22)=0 \Leftrightarrow x=35$ và $x=22$. Cả hai giá trị đều thỏa mãn.

Vậy kích thước của tam tôn là 35cm và 22 cm.

19.24. Một khu vườn hình chữ nhật có diện tích $900m^2$ và chu vi 122m. Tìm chiều dài và chiều rộng của khu vườn.

(Thi học sinh giỏi lớp 9 TP Đà Nẵng, năm học 2008 - 2009)

Hướng dẫn giải – đáp số

Nửa chu vi là 61m. Gọi một chiều là x (m) (0 < x < 61) thì chiều kia là $61-x$ (m). Ta có phương trình $x(61-x)=900 \Leftrightarrow x^2-61x+900=0$

$\Leftrightarrow (x-25)(x-36)=0 \Leftrightarrow x=25$ hoặc x=36 . Cả hai giá trị đều thỏa mãn.

Vậy chiều dài và chiều rộng của khu vườn là 36m và 25m.

19.25. Tháng thứ nhất hai tổ sản xuất được 900 chi tiết máy. Tháng thứ hai tổ I vượt mức 15% và tổ II vượt mức 10% so với tháng thứ nhất vì vậy hai tổ đã sản xuất được 1010 chi tiết máy. Hỏi tháng thứ nhất mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

(Đề thi vào lớp 10 trường THrT Chu Văn An và Hà Nội - Amsterdam năm học 2008-2009).

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi số chi tiết máy tháng thứ nhất tổ I sản xuất là x (chi tiết máy, 0 < x < 900) thì tổ II sản xuất là $900-x$ (chi tiết máy). Ta có phương trình:

$115\%x+110\%(900-x)=1010$ hay $\dfrac{115x}{100}+\dfrac{110(900-x)}{100}=1010$.

Giải phương trình tìm được x = 400. Vậy tháng thứ nhất tổ 1 sản xuất là 400 chi tiết máy và thì tổ II sản xuất là 500 chi tiết máy.

19.26. Một máy bay trực thăng bay từ A đến B cách nhau 960km với vận tốc 280 km/h. Khi bay từ A đến B do bị gió cản nên thời gian bay phải nhiều hơn 1 giờ so với thời gian bay từ B đến A (do được gió đẩy). Tìm vận tốc của gió.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán trường THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước năm học 2009 - 2010).

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi vận tốc của gió là x (km/h), 0 < x < 280. Thời gian bay từ A đến B là $\dfrac{960}{280-x}$ (h). Thời gian bay từ B đến A là $\dfrac{960}{280+x}$(h). Ta có phương trình: $\dfrac{960}{280-x}=\dfrac{960}{280+x}+1$ biến đổi thành $x^2+1920x-78400=0$.

$\Leftrightarrow (x-40)(x+1960)=0$

Nghiệm x = 40 thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Vậy vận tốc của gió là 40km/h.

19.27. Hai người công nhân cùng làm một công việc trong 18 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm 6 giờ và người thứ hai làm 12 giờ thì chỉ hoàn thành được 50% công việc. Hỏi nếu lảm riêng thì mỗi người hoàn thành công việc đó trong bao lâu?

(Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, năm học 2009 - 2010)

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi thời gian làm một mình xong công việc của người thứ nhất là x giờ (x > 0) thì một giờ người đó làm được $\frac{1}{x}$ công việc.

Một giờ người thứ hai làm được $\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{x}\right)$công việc. Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{6}{x}+12\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=36$

Người thứ nhất làm một mình trong 36 giờ xong công việc.

Người thứ hai làm một mình trong $1:\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{36}\right)=36$ (giờ) xong công việc.

19.28. Một nhóm công nhân đặt kế hoạch sản xuất 200 sản phẩm. Trong 4 ngày đầu họ thực hiện đúng mức đề ra, những ngày còn lại họ đã làm vượt mức mỗi ngày 10 sản phẩm nên đã hoàn thành kế hoạch sớm 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày nhóm công nhân cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

(Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, năm học 2011 - 2012)

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi năng suất dự kiến là x (sản phẩm/ngày) $(x \in N^*)$.Thời gian hoàn thành theo kế hoạch là $\frac{200}{x}$ (ngày).

Bốn ngày đầu họ làm được 4x sản phẩm. Những ngày sau năng suất là (x + 10) sản phầm/ngày. số ngày hoàn thành số sản phẩm còn lại là $\frac{200-4x}{x+10}$. Theo bài ra ta có phương trình:

$\frac{200}{x}-2=\frac{200-4x}{x+10}+4$.Biến đổi phương trinh thành $x^2+30x-1000=0 \Leftrightarrow (x-20)(x+50)=0 \Leftrightarrow x=20$ do $x \in N^*$.

Vậy năng suất dự kiến là 20 sản phẩm/ngày.

19.29. Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 36 km. Khi đi từ B trở về A người đó tăng vận tốc thêm 3km/h, vì vậy thời gian về ít hơn thời gian đi là 36 phút. Tính vận tốc người đi xe đạp khi đi từ A đến B.

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên tinh Bắc Ninh, năm học 2013 - 2014)

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi vận tốc người đi xe đạp khi đi từ A đến B là x (km/h), x > 0. Ta có phương trình $\frac{36}{x}-\frac{36}{x+3}=\frac{36}{60}$.

Biến đổi thành $x^2+3x-180=0$

$\Leftrightarrow (x-12)(x+15)=0$. Nghiệm x = 12 thỏa mãn điều kiện.

Vậy vận tốc người đi xe đạp khi đi từ A đến B là 12 km/h.

19.30. Cho quãng đường AB dài 120km. Lúc 7 giờ sáng một xe máy đi từ A đến B. Đi được $\frac{3}{4}$ quãng đường xe bị hỏng phải dừng lại sửa mất 10 phút rồi đi tiếp đến B với vận tốc nhỏ hơn vận tốc lúc đầu là 10km/h. Biết xe máy đến B lúc 11giờ 40 phút trưa cùng ngày. Giả sử vận tốc xe máy trên $\frac{3}{4}$ quãng đường ban đầu không thay đổi và vận tốc của xe máy trên $\frac{1}{4}$ quãng đường còn lại cũng không thay đổi. Hỏi xe máy bị hỏng lúc mấy giờ?

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, năm học 2014 - 2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

Nếu C là vị trí xe máy bị hỏng thì AC = 90km; CB = 30km.

Gọi vận tốc (km/h) của xe máy khi đi từ A đến C là x, x > 10 thì vận tốc của xe máy khi đi từ C đến B là $(x-10)$ (km/h). Xe máy đi quãng đường AC hết $\frac{90}{x}$(h) và CB hết $\frac{30}{x-10}$(h).

Thời gian sửa xe máy 10 phút = $\frac{1}{6}$h. Thời gian xe đi hết quãng đường AB (kể cả sửa xe) là 4 giờ 40 phút $=\frac{14}{3}$h. Biến đổi thành $3x^2-110x+600=0$

$\Leftrightarrow (x-30)(3x-20)=0$. Nghiệm $x=30$ thỏa mãn điều kiện.

Thời gian đi từ A đến C là $90:30=3(h)$. Thời điểm bị hỏng xe lúc 10 giờ sáng cùng ngày.

19.31. Một xe tải đi từ A đến B với vận tốc 40km/h. Sau khi xe tải xuất phát một thời gian thì một xe khách cũng xuất phát từ A với vận tốc 50km/h và nếu không có gì thay đổi thì sẽ duổi kịp xe tải tại B. Nhưng sau khi đi được một nửa quãng đường AB xe khách tăng vận tốc lên 60km/h nên đến B sớm hơn xe tải 16 phút. Tính quãng đường AB.

(Đề thi tuyển vào lớp 10 chuyên ĐHSP TP Hồ Chí Minh, năm học 2015-2016)

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi quãng đường AB dài là x km, x > 0. Thời gian xe tải đi hết quãng đường AB là $\frac{x}{40}$(h). Thời gian dự kiên của xe khách từ A đến B là $\frac{x}{50}$ (h). Thời gian xuất phát sau của xe khách so với xe tải là $\frac{x}{40}-\frac{x}{50}$. Thời gian xe khách thực tế đi là $\frac{1}{2}.\frac{x}{50}+\frac{1}{2}.\frac{x}{60}(h)$; 16 phút = $\frac{4}{15}$ h.

Ta có phương trình $\frac{x}{40}=\frac{x}{100}+\frac{x}{120}+\frac{4}{15}+\left(\frac{x}{40}-\frac{x}{50}\right)\Leftrightarrow x=160$ thỏa mãn điều kiện. Vậy quãng đường AB dài 160 km.

Chương

Chuyên đề 20. PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

A. Kiến thức cần nhớ

1. Phương trình nghiệm nguyên là phương trình có nhiều ẩn số, tất cả các hệ số của phương trình đều là số nguyên. Các nghiệm cần tìm cũng là số nguyên. (Phương trình nghiệm nguyên còn gọi là phương trình Diophantus - mang tên nhà toán học cổ Hy Lạp vào thế kỷ thứ II).

2. Phương trình nghiệm nguyên không có công thức giải tổng quát, chỉ có cách giải của một số dạng. Trong chuyên đề này được giới thiệu qua một số ví dụ và bài tập cụ thể.

3. Cách giải phương trình nghiệm nguyên rất đa dạng, đòi hỏi học sinh phân tích, dự đoán, đối chiếu và tư duy sáng tạo, lôgic để tìm nghiệm.

B. Một số ví dụ

1. Dạng phương trình bậc nhất 2 ẩn $ax+by=c$ ($a,b,c\in\mathbb{Z}$; a, b không đồng thời bằng 0).

Ta có định lý sau: Điều kiện cần và đủ để phương trình $ax+by=c \quad (a,b,c\in\mathbb{Z}; a,b\neq 0)$ có nghiệm nguyên là ước số chung lớn nhất của a và b là ước của c. (tức là $(a,b)|c$).

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên của các phương trình:

a) $x-3y=5$. (1);　　　　b) $2x-5y=20$.　　(2);

c) $3x-7y=24$. (3);　　　　d) $20x-11y=-49$. (4).

** Tìm cách giải:* Câu a) hệ số của ẩn x là 1, ta có thể tính ngay ẩn x theo y. Khi đó y lấy các giá trị nguyên thì chắc chắn x nguyên. Câu b); c) về giá trị tuyệt đối thì hệ số của x nhỏ hơn hệ số của y. Do đó ta tính x theo y. Ta tách phần nguyên, đặt phần phân số bằng ẩn số mới và đưa về phương trình mới có các hệ số nhỏ hơn hệ số của phương trình ban đầu. Tiếp tục cách giải như trên cho đến khi có một ẩn số có hệ số bằng 1 và được tính theo ẩn số kia có hệ số nguyên. Sau đó tính x, y theo ẩn số mới cuối cùng bằng cách tính ngược từ dưới lên.

d) Về giá trị tuyệt đối thì hệ số của y nhỏ hơn hệ số của x. Do đó ta tính y theo x. Tiếp tục làm như b).

Giải

a) Từ (1) ta có: $x=5+3y$. Nếu $y=t\in\mathbb{Z}$ thì $x\in\mathbb{Z}$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm nguyên tổng quát là $\begin{cases}x=5+3t\\ y=t\end{cases}(t\in\mathbb{Z})$

(Muốn tìm các nghiệm nguyên bằng số cụ thể thì ta chỉ việc cho t các giá trị nguyên cụ thể:
Thí dụ với t = 2 thì (x = 11; y = 2); với t = - 3 thì (x = - 9; y = - 3),...)

b) Từ (2) ta có $2x=5y+20 \Leftrightarrow x=10+2y+\frac{y}{2}$

Để $x\in\mathbb{Z}$ thì $y\in\mathbb{Z}$ và $\frac{y}{2}\in\mathbb{Z}$. Do đó đặt $\frac{y}{2}=t\,(t\in\mathbb{Z})$ ta sẽ có $y=2t$ và $x=10+2.(2t)+t=10+5t$

Vậy phương trình (2) có nghiệm nguyên tổng quát là $\begin{cases} x = 10 + 5t \\ y = 2t \end{cases} \left(t \in \mathbb{Z} \right)$

c) Cách 1: Tương tự b)

Cách 2: Nhận xét: ƯCLN(3;24) = 3 nên đặt $y = 3t\left(t \in \mathbb{Z} \right)$

Ta có $3x - 7y = 24 \Leftrightarrow 3x - 21t = 24 \Leftrightarrow x - 7t = 8 \Leftrightarrow x = 8 + 7t$

Do đó phương trình (3) có nghiệm tổng quát là $\begin{cases} x = 8 + 7t \\ y = 3t \end{cases} \left(t \in \mathbb{Z} \right)$

d) $20x - 11y = -49 \Leftrightarrow 11y = 20x + 49 \Leftrightarrow y = \dfrac{20x + 49}{11}$

Tách phần nguyên ta có: $y = x + 4 + \dfrac{9x + 5}{11}$

Để $y \in \mathbb{Z}$ thì $x \in \mathbb{Z}$ và $\dfrac{9x + 5}{11} \in \mathbb{Z}$. Đặt $\dfrac{9x + 5}{11} = t\left(t \in \mathbb{Z} \right)$

Ta có $9x + 5 = 11t \Leftrightarrow x = \dfrac{11t - 5}{9} = t + \dfrac{2t - 5}{9}$. Đặt $\dfrac{2t - 5}{9} = u, \left(u \in \mathbb{Z} \right)$

Ta có $2t - 5 = 9u \Leftrightarrow t = \dfrac{9u + 5}{2} = 4u + 2 + \dfrac{u + 1}{2}$. Đặt $\dfrac{u + 1}{2} = v, \left(v \in \mathbb{Z} \right)$

Ta có $u + 1 = 2v \Leftrightarrow u = 2v - 1$

Ta thấy $v \in \mathbb{Z}; u \in \mathbb{Z}$ và $t \in \mathbb{Z}$. Từ đó $x \in \mathbb{Z}$ và $y \in \mathbb{Z}$.

Tính ngược từ dưới lên ta được $t = 4\left(2v - 1 \right) + 2 + v = 9v - 2$.

$x = t + u = \left(9v - 2 \right) + \left(2v - 1 \right) = 11v - 3$

$y = x + 4 + t = \left(11v - 3 \right) + 4 + \left(9v - 2 \right) = 20v - 1$.

Vậy nghiệm nguyên tổng quát của phương trình là $\begin{cases} x = 11v - 3 \\ y = 20v - 1 \end{cases} \left(v \in \mathbb{Z} \right)$

Chú ý: Qua bốn thí dụ trên ta có thể rút ra phương pháp giải sau:

Bước 1. Tính ẩn có giá trị tuyệt đối của hệ số nhỏ hơn theo ẩn kia.

Bước 2. Ta tách phần nguyên, đặt phần phân số bằng ẩn số mới và đưa về phương trình mới có các hệ số nhỏ hơn hệ số của phương trình ban đầu. Tiếp tục cách giải như trên cho đến khi có một ẩn số có hệ số bằng 1 và được tính theo ẩn số kia có hệ số nguyên. (Việc tách phần nguyên cần linh hoạt sao cho giá trị tuyệt đối của hệ số của ẩn trong phần phân số nhỏ nhất)

Bước 3. Sau đó tính x, y theo ẩn số mới cuối cùng bằng cách tính ngược từ dưới lên.

(Nếu một trong hai hệ số và hệ số tự do có ƯSCLN = k > 1; $k \in \mathbb{Z}$ thì ta có thể đặt một ẩn bằng ẩn mới kt $\left(t \in \mathbb{Z} \right)$ - (xem ví dụ 1c) để rút ngắn các bước giải phương trình.)

Ví dụ 2. Tìm nghiệm nguyên dương của các phương trình:

a) $7x+3y=65$.(1); b) $5x+4y=12$. (2); c) $3x-8y=13$. (3).

*** Tìm cách giải:** Trước hết ta tìm nghiệm nguyên tổng quát của các phương trình. Sau đó dựa vào biểu thức nghiệm, lý luận, giải tìm ra giá trị nguyên của ẩn số mới cuối cùng để x > 0 và y > 0.

Giải

a) $(1) \Leftrightarrow 3y=65-7x$ hay $y=\frac{65-7x}{3}$

Tách phần nguyên $y=21-2x+\frac{2-x}{3}$. Đặt $\frac{2-x}{3}=t,(t\in\mathbb{Z})$

Ta có $x=2-3t$ và $y=21-2(2-3t)+t=17+7t$

Do đó phương trình (1) có nghiệm nguyên tổng quát là $\begin{cases}x=2-3t\\ y=17+7t\end{cases},(t\in\mathbb{Z})$

Để x>0 và y>0 ta phải có $\begin{cases}2-3t>0\\ 17+7t>0\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{17}{7}<t<\frac{2}{3}$

Từ đó có t = 0; - 1; - 2 ta có các nghiệm nguyên dương của phương trình (1) là:

$\begin{cases}x=2\\ y=17\end{cases};\begin{cases}x=5\\ y=10\end{cases};\begin{cases}x=8\\ y=3\end{cases}$

b) Do ƯCLN(4; 12) = 4. Do đó ta đặt $x=4t,(t\in\mathbb{Z})$

Ta có $20t+4y=12 \Leftrightarrow 5t+y=3 \Leftrightarrow y=3-5t$

Do đó phương trình (3) có nghiệm nguyên tổng quát là $\begin{cases}x=4t\\ y=3-5t\end{cases},(t\in\mathbb{Z})$

Để x > 0 và y > 0 ta phải có $\begin{cases}4t>0\\ 3-5t>0\end{cases} \Leftrightarrow 0<t<\frac{3}{5}$ không có giá trị nguyên nào của t thỏa mãn.

Vậy phương trình (2) không có nghiệm nguyên dương.

c) Ta có: $3x-8y=13 \Leftrightarrow 3x=8y+13 \Leftrightarrow x=\frac{8y+13}{3}$

Tách phần nguyên được $x=3y+4+\frac{1-y}{3}$. Đặt $\frac{1-y}{3}=t,(t\in\mathbb{Z})$

Ta có $y=1-3t$ và $x=3(1-3t)+4+t=7-8t$.

Nghiệm nguyên tổng quát của phương trình là $\begin{cases}x=7-8t\\ y=1-3t\end{cases},(t\in\mathbb{Z})$

Để x > 0 và y > 0 ta phải có: $\begin{cases}7-8t>0\\ 1-3t>0\end{cases}$

Với $7-8t>0 \Leftrightarrow t<\frac{7}{8}$ và $1-3t>0 \Leftrightarrow t<\frac{1}{3}$

Kết hợp được $t<\frac{1}{3}$(*). Lần lượt cho t lấy các giá trị nguyên 0; - 1; - 2; - 3... thỏa mãn (*) ta tìm được các giá trị tương ứng của x và y là nghiệm của phương trình (3). Vậy phương trình (3) có vô số nghiệm nguyên dương.

2. Dạng phương trình bậc nhất nhiều ẩn $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=c$ ***(***$a_1;a_2;...;a_n;c\in\mathbb{Z}$***;*** $a_1;a_2;...;a_n$ ***không đồng thời bằng 0).***

Ta có định lý sau: Điều kiện cần và đủ để phương trình $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=c$ ($a_1;a_2;...;a_n;c\in\mathbb{Z}$; $a_1;a_2;...;a_n\neq 0$) có nghiệm nguyên là ước số chung lớn nhất của a_1; a_2;...; a_n là ước của c. (Tức là $(a_1,\ a_2,...,\ a_n)|c$).

Ví dụ 3. Giải phương trình trên tập số nguyên:

$9x+13y+5z=6$. (1)

Giải

$(1)\Leftrightarrow x+5(y+z)+8(x+y)=6$

Đặt $u=y+z;\ v=x+y$ khi đó $(1)\Leftrightarrow x+5u+8v=6$

$\Leftrightarrow x=6-5u-8v;\ y=v-x=v-6+5u+8v=5u+9v-6$

Và $z=u-y=u-5u-9v+6=6-4u-9v$

Vậy nghiệm tổng quát của (1) là $\begin{cases}x=6-5u-8v\\ y=-6+5u+9v,(u\in\mathbb{Z};v\in\mathbb{Z})\\ z=6-4u-9v\end{cases}$

3. Dạng phương trình bậc cao một ẩn

Ví dụ 4. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình:

a) $2x^2+x-21=0$. (1); b) $x^3-5x=2(x-3)$. (2);

c) $x^4+2x^3-x^2-8x=12$. (3).

*** Tìm cách giải:** Ta chuyển vế đưa về dạng $A(x)=0$ sau đó phân tích $A(x)$ thành nhân tử.

Giải

a) $2x^2+x-21=0\Leftrightarrow 2x^2-6x+7x-21=0\Leftrightarrow 2x(x-3)+7(x-3)=0\Leftrightarrow (x-3)(2x+7)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+7=0\\ x-3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3,5(loại)\\ x=3\end{array}\right.$

Nghiệm nguyên của (1) là x = 3

b) $x^3-5x=2(x-3)\Leftrightarrow x^3-7x+6=0$

$\Leftrightarrow x^2(x-1)+x(x-1)-6(x-1)=0$

$\Leftrightarrow (x^2+x-6)(x-1)=0\Leftrightarrow (x+3)(x-2)(x-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3=0\\ x-2=0\\ x-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3\\ x=2\\ x=1\end{array}\right.$

Tập nghiệm nguyên của (2) là $S=\{-3;1;2\}$

c) $x^4+2x^3-x^2-8x=12$

$\Leftrightarrow x^4-4x^2+2x^3-8x+3x^2-12=0\Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x^2+2x+3)=0$.

Do $x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0,\forall x$ nên nghiệm nguyên của phương trình (3) là $x=\pm 2$.

Ví dụ 5. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

a) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4x+5}+\dfrac{x^2+4x+5}{x^2+4x+6}=\dfrac{7}{6}$ (1)

b) $(x+3)^3+(x+4)^3+(x+5)^3=(x+6)^3$. (2)

*** Tìm cách giải:** a) Ta thấy tử và mẫu các phân thức đều có x^2+4x giống nhau, ta đặt ẩn phụ để giải. Hơn nữa $x^2+4x+5=(x+2)^2+1$ và $x^2+4x+6=(x+2)^2+2$ đều dương với mọi x nên ĐKXĐ là $x\in\mathbb{R}$.

b) Dùng khai triển $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Giải

Đặt $x^2+4x+5=y\,(\in\mathbb{Z})$ ta được phương trình

$\dfrac{y-1}{y}+\dfrac{y}{y+1}=\dfrac{7}{6}\Leftrightarrow \dfrac{(y-1)(y+1)+y^2}{y(y+1)}=\dfrac{7}{6}$

$\Rightarrow 6(y^2-1+y^2)=7(y^2+y)$

$\Leftrightarrow 5y^2-7y-6=0\Leftrightarrow (5y+3)(y-2)=0$

Ta tìm được $y=-\dfrac{3}{5}$ (loại) và $y=2\in\mathbb{Z}$.

Vậy $x^2+4x+5=2\Leftrightarrow x^2+4x+3=0\Leftrightarrow (x+1)(x+3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\\ x=-3\end{array}\right.$

Nghiệm nguyên của phương trình là x = - 1 và x = - 3.

b) Ta có $(x+3)^3=x^3+9x^2+27x+27$;

$\left(x+4\right)^3=x^3+12x^2+48x+64$

$\left(x+5\right)^3=x^3+15x^2+75x+125;\ \left(x+6\right)^3=x^3+18x^2+108x+216$

Do đó $\left(x+3\right)^3+\left(x+4\right)^3+\left(x+5\right)^3=\left(x+6\right)^3 \Leftrightarrow 2x^3+18x^2+42x=0$

$\Leftrightarrow 2x(x^2+9x+21)=0 \Leftrightarrow x=0\ do\ x^2+9x+21=\left(x+\frac{9}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,\forall x$

Nghiệm nguyên của phương trình là x = 0.

4. Dạng phương trình bậc cao nhiều ẩn

Ví dụ 6. a) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $5\left(x+y\right)=xy$;

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2\left(x+y+9\right)=3xy$.

* *Tìm cách giải:* Các bài thuộc dạng này thường dùng phương pháp phân tích, tức là biến đổi một vế thành một tích, còn vế kia là một số. Viết số thành tích các thừa số và cho tương ứng với các thừa số của tích kia ta sẽ tìm được các giá trị nguyên của ẩn.

Giải

a) Ta có $5\left(x+y\right)=xy \Leftrightarrow xy-5x-5y+25=25$

$\Leftrightarrow x\left(y-5\right)-5\left(y-5\right)=25 \Leftrightarrow \left(x-5\right)\left(y-5\right)=25$

Vì $x;y>0 \Rightarrow x-5>-5$ và $y-5>-5$ nên $25=5.5=1.25=25.1$

Giải các cặp ta tìm được các nghiệm nguyên dương sau:

$\begin{cases}x-5=5\\y-5=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=10\\y=10\end{cases};\begin{cases}x-5=1\\y-5=25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=6\\y=30\end{cases};\begin{cases}x-5=25\\y-5=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=30\\y=6\end{cases}$

b) $2\left(x+y+9\right)=3xy \Leftrightarrow 3xy-2x-2y-18=0$

$\Leftrightarrow 9xy-6x-6y=54 \Leftrightarrow 9xy-6x-6y+4=54+4$

$\Leftrightarrow 3x\left(3y-2\right)-2\left(3y-2\right)=58 \Leftrightarrow \left(3x-2\right)\left(3y-2\right)=58$

Ta biết $58=1.58=58.1=2.29=29.2=\left(-1\right).\left(-58\right)=\left(-58\right).\left(-1\right)=\left(-2\right).\left(-29\right)=\left(-29\right).\left(-2\right)$

Do đó giải từng cặp ta có nghiệm nguyên của phương trình trên là: $\left(x;y\right)=\left(1;20\right);\left(20;1\right);\left(0;-9\right);\left(-9;0\right)$

Ví dụ 7. Tìm nghiệm nguyên dương của các phương trình:

a) $2\left(x+y+z\right)+9=3xyz$.(1)

b) $2\left(t+x+y+z\right)+7=3txyz$.(2)

* *Tìm cách giải:* a) Ta có $2x+2y+2z+9=3xyz$. Đây là phương trình mà vai trò các ẩn như nhau, ta dùng phương pháp cực hạn. Ta giả sử $1\le x\le y\le z$ và chia hai vế của phương trình vừa lập cho *xyz* rồi lập luận so sánh để tìm nghiệm.

b) Tương tự dùng phương pháp cực hạn.

Giải

a) Do vai trò của x, y, z như nhau nên không mất tổng quát ta giả sử $1\le x\le y\le z$.

Chia hai vế của (1) cho số dương *xyz* ta có $\frac{2}{yz}+\frac{2}{xz}+\frac{2}{xy}+\frac{9}{xyz}=3$.

Do $1\le x\le y\le z$ nên $x^2\le xy\le xz\le yz\le xyz$

Do đó ta có: $3=\frac{2}{yz}+\frac{2}{xz}+\frac{2}{xy}+\frac{9}{xyz}\le\frac{15}{x^2}\Rightarrow x^2\le 5\Rightarrow x=1;2$

Với x = 1: Thay x = 1 vào (1) ta có:

$2y+2z+11=3yz\ \ (1\ a)\Leftrightarrow 3yz-2y-2z=11\Leftrightarrow 9yz-6y-6z=33$

$\Leftrightarrow 3y(3z-2)-2(3z-2)=37\Leftrightarrow(3y-2)(3z-2)=37=1.37$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3y-2=1\\3z-2=37\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\z=13\end{array}\right.$. Ta có nghiệm $(x,y,z)=(1;1;13)$

Với x = 2: Thay x = 2 vào (l) ta có:

$4+2y+2z+9=6yz\Leftrightarrow 6yz-2y-2z=13\Leftrightarrow 36yz-12y-12z=78$

$\Leftrightarrow 6y(6z-2)-2(6z-2)=82\Leftrightarrow(6y-2)(6z-2)=82=1.82=2.41$

$\left[\begin{array}{l}6y-2=1\\6z-2=82\end{array}\right.$ và $\left[\begin{array}{l}6y-2=2\\6z-2=41\end{array}\right.$ đều không có giá trị nguyên dương

Vậy: Do vai trò của x, y, z như nhau nên phương trình có 3 nghiệm nguyên dương là $(x,y,z)=(1;1;13)$ và các hoán vị của nó là $(1;13;1);\ (13;1;1)$.

Chú ý: Khi giải phương trình $2y+2z+11=3yz$ ta giải bằng phương pháp phân tích. Ta có thể tiếp tục giải bằng phương pháp cực hạn cũng được:

Do $1<y<z$ nên từ $2y+2z+11=3yz\Rightarrow 3=\frac{2}{z}+\frac{2}{y}+\frac{11}{yz}\le\frac{15}{y}\Rightarrow 3y\le 15$

$\Rightarrow y=1;2;3;4;5$. Lần lượt thay vào phương trình (2) ta nhận được khi y = 1 thì z = 13 còn với y = 2; 3; 4; 5 ta không tìm được số nguyên dương z.

b) $2(t+x+y+z)+7=3txyz$. (2)

Do vai trò của x, y, z, t như nhau nên không mất tổng quát ta giả sử $1\le t\le x\le y\le z$

Từ (2) $\Rightarrow 3=\frac{2}{xyz}+\frac{2}{xzt}+\frac{2}{xyt}+\frac{2}{yzt}+\frac{7}{xyzt}\le\frac{15}{t^3}$

$\Rightarrow t^3\le 5\Rightarrow t=1$.

Với t = 1 thì $2(x+y+z)+9=3xyz$. Đây chính là phương trình trong câu a). Ta tìm được nghiệm là $(x,y,z)=(1;1;13)$.

Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình (2) là

$(t,x,y,z)=(1;1;1;13);(1;1;13;1);(1;13;1;1);(13;1;1;1)$.

Ví dụ 8. a)Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2-100=y(6x-13y)$

b) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$1!+2!+3!+...+x!=y^2$

* *Tìm lời giải*: Ta dùng phương pháp loại trừ để giải các bài toán dạng này.

Câu a) biến đổi phương trình được $(x-3y)^2=2^2.(25-y^2)$.

Với $x,y\in\mathbb{Z}$ thì $(x-3y)^2$ là số chính phương. Do đó $(25-y^2)>0$ và là sổ chính phương. Lý luận ấy dùng để loại trừ dần các giá trị của y và tìm x.

Câu b) ta biết $x!=1.2.3........x$

Giải

a) $x^2-100=y(6x-13y)\Leftrightarrow x^2-6xy+9y^2=100-4y^2$

$\Leftrightarrow(x-3y)^2=2^2.(25-y^2)\ge 0\Rightarrow|y|\le 5$ và $25-y^2$ là số chính phương.

+ Với y = 0 thì $x=\pm 10$

+ Với y = ± 1 thì $25-y^2=24$ không chính phương.

+ Với y = ±2 thì $25-y^2=21$ không chính phương.

+ Với y = ±3 thì $25-y^2=25-9=16$ là số chính phương.

Khi ấy $(x-3y)^2=4.16=64=8^2$. Do đó x - 3y = 8 hoặc x - 3y = -8.

Với y = - 3 thì x = -17 hoặc x = -1

Với y = 3 thì x = 17 hoặc x = 1.

+ Tương tự với y = ± 4 ta có:

Với y = - 4 thì x = - 6 hoặc x = - 18

Với y = 4 thì x = 18 hoặc x = 6.

+ Tương tự với y = ± 5 ta có:

Với y = - 5 thì x = - 15; Với y = 5 thì x = 15.

Vậy nghiệm nguyên của phương trình trên là:

$$(x,y)=(10;0);(-10;0);(-17;-3);(-1;-3);(17;3);(1;3);(-6;-4);$$
$$(-18;-4);(18;4);(6;4);(-15;-5);(15;5)$$

b) Với $x \geq 5$ thì $x! \vdots 10$

nên $y^2 = 1!+2!+3!+4!+5!+...+x! = 33+5!+...+x!$ có tận cùng là 3, mà không có số chính phương nào có tận cùng là 3. Vậy x < 5.

Với x = 1 thì $1! = y^2 \Rightarrow y = 1$.

Với x = 2 thì $1!+2! = y^2 \Rightarrow 3 = y^2$ không có giá trị nguyên dương của y.

Với x = 3 thì $1!+2!+3! = y^2 \Rightarrow 9 = y^2 \Rightarrow y = 3$.

Với x = 4 thì $1!+2!+3!+4! = y^2 \Rightarrow 33 = y^2$ cũng không có có giá trị nguyên dương của y thỏa mãn.

Vậy nghiệm của phương trình là $(x,y)=(1;1);(3;3)$.

Ví dụ 9. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^3 - 5y^3 - 25z^3 = 0$.

Tìm cách giải: Ta sử dụng tính chất chia hết và phương pháp xuống thang để giải.

Giải

Giả sử $(x_0; y_0; z_0)$ là nghiệm nguyên của phương trình tức là

${x_0}^3 - 5{y_0}^3 - 25{z_0}^3 = 0$ (2), khi đó $x_0 \vdots 5$. Đặt $x_0 = 5x_1$. Thay vào phương trình (2) ta được $125{x_1}^3 - 5{y_0}^3 - 25{z_0}^3 = 0$ hay là $25{x_1}^3 - {y_0}^3 - 5{z_0}^3 = 0$ (3).

Chứng tỏ $y_0 \vdots 5$. Đặt $y_0 = 5y_1$. Thay vào (3) ta lại có $5{x_1}^3 - 25{y_1}^3 - {z_0}^3 = 0$ (4)

Chứng tỏ $z_0 \vdots 5$. Đặt $z_0 = 5z_1$. Thay vào (4) ta lại có ${x_1}^3 - 5{y_1}^3 - 25{z_1}^3 = 0$ (5)

Như vậy $(x_1; y_1; z_1) = \left(\dfrac{x_0}{5}; \dfrac{y_0}{5}; \dfrac{z_0}{5}\right)$ cũng là nghiệm của phương trình

Cứ tiếp tục mãi ta có $\left(\dfrac{x_0}{5^k}; \dfrac{y_0}{5^k}; \dfrac{z_0}{5^k}\right) \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{Z}$. Do đó $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

Vậy phương trình (1) có nghiệm nguyên duy nhất là $(0;0;0)$

Ví dụ 10. Tìm số $\overline{abc}$ với a ≠ 0 thỏa mãn $\overline{abc} + \overline{acb} = \overline{ccc}$.

* *Tìm cách giải:* Ta sử dụng cấu tạo số và tính chất chia hết để giải.

Giải

$$\overline{abc} + \overline{acb} = \overline{ccc} \Leftrightarrow 100a + 10b + c + 100a + 10c + b = 111c$$

$$\Leftrightarrow 200a + 11b = 100c \Leftrightarrow 100(c - 2a) = 11b \vdots 100$$

Mà b là chữ số, $b \in \mathbb{N}; 0 \leq b \leq 9$ nên b = 0. Khi đó c = 2a

Như vậy a = 1; 2; 3; 4 và c = 2; 4; 6; 8.

Ta có các số sau thỏa mãn 102; 204; 306; 408

C. Bài tập vận dụng

Dạng phương trình hậc nhất 2 ẩn: $ax + by = c$

1.1. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình:

a) $8x - y = 15$; b) $5x + 12y = 33$;

c) $14x - 9y = 21$; d) $29x + 15y = 20$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a/ Hệ số của ẩn y là -1. Đáp số $\begin{cases} x = t \\ y = 8t - 15 \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$

b/ Về giá trị tuyệt đối thì hệ số của x nhỏ hơn hệ số của y. Do đó ta tính x theo y. Sau đó tách phần nguyên.

Đáp số: $\begin{cases} x = 12u + 9 \\ y = 5u + 1 \end{cases}, u \in \mathbb{Z}$

c/ Ta có: $(14; 21) = 7$ nên $y \vdots 7$. Đặt $y = 7t$ ta có phương trình $2x - 9t = 3$. Tiếp tục làm như câu b) ta tìm được $\begin{cases} x = 9u - 3 \\ y = 14u - 7 \end{cases}, u \in \mathbb{Z}$

d) Cách 1: Phương trình đã cho (viết tắt là PT):

$$29x + 15y = 20 \Leftrightarrow y = \frac{20 - 29x}{15} = \frac{15 - 30x + 5 + x}{15} = 1 - 2x + \frac{5 + x}{15}$$

Đặt $\frac{5 + x}{15} = u, (u \in \mathbb{Z})$ ta có $x = 15u - 5$

Nghiệm nguyên tổng quát của PT là $\begin{cases} x = 15u - 5 \\ y = 11 - 29u \end{cases}$

Cách 2: Ta có $(15; 20) = 5$ nên $x \vdots 5$

Đặt $x = 5t$ ta có phương trình $29t + 3y = 4$

Tiếp tục làm như b) ta tìm được $\begin{cases} x = 15u - 5 \\ y = 11 - 29u \end{cases}; u \in \mathbb{Z}$

1.2. Chứng minh rằng nếu ước chung lớn nhất của a và b không chia hết c (tức là $c \not\vdots (a, b)$) thì phương trình $ax + by = c (a; b \neq 0)$ không có nghiệm nguyên.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta chứng minh bằng phản chứng:

Giả sử phương trình $ax+by=c\ \left(a;b\neq 0\right)$ có nghiệm nguyên là $(x_0;y_0)$ tức là $ax_0+by_0=c$. Gọi $\left(a;b\right)=d$ thì $a=dm;\ b=dn\ \ \left(m,\ n\in\mathbb{Z}\right)$.

Ta có: $dmx_0+dny_0=c\Rightarrow mx_0+ny_0=\dfrac{c}{d}$

Do $c\not\vdots\, d$ nên $\dfrac{c}{d}\notin Z\Rightarrow mx_o+ny_o\notin Z$ điều này vô lý vì $m;n;x_0;y_0\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ đpcm.

1.3. Tìm nghiệm nguyên dương của các phương trình:

a) $4x+5y=19$;

b) $3\left(x+y+1\right)=4\left(12-y\right)$;

c) $\dfrac{2x}{3}-\dfrac{3y}{4}=\dfrac{5}{2}$;

d) $\left(5-x\right)\left(5+x\right)=y\left(2x+y\right)$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a/ Nghiệm nguyên tổng quát là $\begin{cases}x=5t+1\\ y=3-4t\end{cases};t\in\mathbb{Z}$. Nghiệm nguyên dương là $\left(x;y\right)=\left(1;3\right)$

b/ Biến đổi phương trình thành $3x+7y=45$. Do $\left(3;45\right)=3$ nên $y\,\vdots\,3$

Phương trình có nghiệm nguyên tổng quát là $\begin{cases}x=15-7t\\ y=3t\end{cases}\left(t\in\mathbb{Z}\right)$

Để x > 0 và y > 0 ta phải có $0<t<\dfrac{15}{7}$ Vậy t = 1; 2. Phương trình có 2 nghiệm nguyên dương là $\left(x;y\right)=\left(8;3\right);\left(1;6\right)$

c) Biến đổi phương trình thành $8x-9y=30$

Nghiệm tổng quát là $\begin{cases}x=9t+6\\ y=8t+2\end{cases};t\in\mathbb{Z}$ và t = 0; 1; 2; 3; …

Phương trình có vô số nghiệm nguyên dương $\left(x;y\right)=\left(6;2\right);\left(15;10\right);\left(24;18\right);...$

d) Biến đổi phương trình thành $x^2+2xy+y^2=25\Leftrightarrow\left(x+y\right)^2=5^2$

hay $\left|x+y\right|=5$.

Do x > 0 và y > 0 nên $x+y=5$ và phương trình có 4 nghiệm $\left(x;y\right)=\left(1;4\right);\left(2;3\right);\left(3;2\right);\left(4;1\right)$.

Dạng phương trình bậc nhất nhiều ẩn $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+\ a_nx_n\ =\ b$

1.4. Giải phương trình trên tập số nguyên: $-4x+3y+8z=9$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $-\ 4x+3y+8z=9\Leftrightarrow x+8\left(y+z\right)-5\left(x+y\right)=9$

Đặt $u = y + z; v = x + y$

Nghiệm nguyên tổng quát của phương trình là $\begin{cases} x = 9 - 8u + 5v \\ y = -9 + 8u - 4v\left(u \in \mathbb{Z}; v \in \mathbb{Z}\right) \\ z = 9 - 7u + 4v \end{cases}$

Dạng phương trình bậc cao 1 ẩn

1.5. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình:

a) $3x^2 - 14x = 5$;

b) $x\left(2x^2 + 9x + 7\right) = 6$;

c) $x^4 + 2x^3 - 19x^2 + 8x + 60 = 0$;

d) $\left(x^4 - 13x^2 + 36\right)\left(x^2 + 2x\right) = 65x^2 - 5x^4 - 180$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta chuyển vế đưa về dạng $A\left(x\right) = 0$ sau đó phân tích $A\left(x\right)$ thành nhân tử bằng tách và thêm bớt các hạng tử.

a) $3x^2 - 14x = 5 \Leftrightarrow 3x^2 + x - 15x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left(x - 5\right)\left(3x + 1\right) = 0$

Nghiệm nguyên của phương trình là $x = 5$

b) $x\left(2x^2 + 9x + 7\right) = 6 \Leftrightarrow 2x^3 + 9x^2 + 7x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + 3\right)\left(x + 2\right)\left(2x - 1\right) = 0$

Tập nghiệm là $S = \left\{-3; -2\right\}$

c) $x^4 + 2x^3 - 19x^2 + 8x + 60 = 0 \Leftrightarrow \left(x - 2\right)\left(x + 2\right)\left(x + 3\right)\left(x - 5\right) = 0$

Tập nghiệm $S = \left\{-3; -2; 2; 5\right\}$

d) $\left(x^4 - 13x^2 + 36\right)\left(x^2 + 2x\right) = 65x^2 - 5x^4 - 180$

$\Leftrightarrow \left(x^4 - 13x^2 + 36\right)\left(x^2 + 2x + 5\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 4\right)\left(x^2 - 9\right)\left(x^2 + 2x + 5\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - 2\right)\left(x + 2\right)\left(x + 3\right)\left(x - 3\right)\left(x^2 + 2x + 5\right) = 0$

Do $x^2 + 2x + 5 = \left(x + 1\right)^2 + 4 > 0, \forall x$ nên nghiệm nguyên của phương trình phương trình là $x = \pm 2;\ x = \pm 3$

1.6. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

a) $\dfrac{1}{\left(x + 1\right)\left(x + 3\right)} - \dfrac{1}{\left(x + 2\right)^2} = \dfrac{1}{12}$

b) $\dfrac{\left(x + 2\right)^2}{\left(x + 2\right)^2 + 1} + \dfrac{\left(x + 2\right)^2 + 1}{\left(x + 2\right)^2 + 2} = \dfrac{1}{2}$

c) $\left(x+1\right)^3+\left(x+2\right)^3+\left(x+3\right)^3=\left(x+5\right)^3-\left(x+4\right)^3$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) ĐKXĐ: $x\neq -1;\ x\neq -2;\ x\neq -3$

Phương trình biến đổi thành $\dfrac{1}{x^2+4x+3}-\dfrac{1}{x^2+4x+4}=\dfrac{1}{12}$

Đặt $x^2+4x+3=y$ phương trình trở thành $\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{1}{12}$ suy ra

$y^2+y-12=0\Leftrightarrow\left(y-3\right)\left(y+4\right)=0$

* $x^2+4x+3-3=0\Leftrightarrow x\left(x+4\right)=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=4$

* $x^2+4x+3+4=0\Leftrightarrow\left(x+2\right)^2+3=0$ vô nghiệm vì vế trái $>0\forall x$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là 0 và – 4.

b) Các mẫu đều dương nên ĐKXĐ là $x\in\mathbb{R}$. Biến đổi phương trình thành

$\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4x+5}+\dfrac{x^2+4x+5}{x^2+4x+6}=\dfrac{1}{2}$.

Đặt $x^2+4x+5=y$ ta có $\dfrac{y-1}{y}+\dfrac{y}{y+1}=\dfrac{1}{2}$ suy ra $3y^2-y-2=0\Leftrightarrow\left(y-1\right)\left(3y+2\right)=0$

Từ đây tìm được nghiệm của phương trình là $x=-2$

c) Áp dụng hằng đẳng thức $\left(a+b\right)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Ta có $\left(x+1\right)^3+\left(x+2\right)^3+\left(x+3\right)^3+\left(x+4\right)^3-\left(x+5\right)^3=0\Leftrightarrow 3x^3+15x^2+15x=25$

Vế trái chia hết cho 3; vế phải không chia hết cho 3. Phương trình không có nghiệm nguyên.

Chú ý: Câu c) có thể đặt $x+3=y\left(\in\mathbb{Z}\right)$ Phương trình trở thành

$(y-2)^3+\left(y-1\right)^3+y^3+\left(y+1\right)^3-\left(y+2\right)^3=0$ rút gọn thành $3y^3-12y^2+6y=16$

Dạng phương trình bậc cao nhiều ẩn

1.7. a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $6\left(x+y\right)=xy+33$;

b) Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình $3\left(x+y\right)=2xy$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $6\left(x+y\right)=xy+33\Leftrightarrow\left(x-6\right)\left(y-6\right)=3$

Vì $3=1.3=3.1=\left(-1\right)\left(-3\right)=\left(-3\right)\left(-1\right)$

Giải các cặp ta tìm được các nghiệm nguyên sau: $\left(x;y\right)=\left(7;9\right);\left(9;7\right);\left(5;3\right);\left(3;5\right)$.

b) $3\left(x+y\right)=2xy \Leftrightarrow 4xy-6x-6y=0 \Leftrightarrow \left(2x-3\right)\left(2y-3\right)=9$

Ta biết $9=1.9=9.1=\left(-1\right)\left(-9\right)=\left(-9\right)\left(-1\right)=3.3=\left(-3\right)\left(-3\right)$

Giải từng cặp ta có nghiệm tự nhiên của phương trình trên là: $\left(x;y\right)=\left(2;6\right);\left(6;2\right);\left(3;3\right);\left(0;0\right)$

1.8. a) Tìm ba số nguyên dương sao cho tổng bằng tích;

b) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $5\left(x+y+z+t\right)+4=6xyzt$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Gọi ba số nguyên dương là x; y; z. Theo đầu bài $x+y+z=xyz$. Do vai trò x, y, z như nhau nên giả sử $1\le x\le y\le z$. Chia 2 vế của phương trình cho xyz ta có $1=\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}\le\frac{3}{x^2}$ hay $x^2\le 3\Rightarrow x=1$

Thay x = 1 vào phương trình ta có $1+y+z=yz \Leftrightarrow yz-y-z=1 \Leftrightarrow \left(y-1\right)\left(z-1\right)=2=1.2$ Từ đó tìm được $y=2;\ z=3$

Nghiệm nguyên dương của phương trình là: $\left(x;y;z\right)=\left(1;2;3\right);\left(1;3;2\right);\left(2;3;1\right);\left(2;1;3\right);\left(3;2;1\right);\left(3;1;2\right)$

b) Giả sử $x\ge y\ge z\ge t\ge 1$, chia 2 vế của phương trình cho *xyzt* ta có

$$6=\frac{5}{xyz}+\frac{5}{xzt}+\frac{5}{xyt}+\frac{5}{yzt}+\frac{4}{xyzt}\le\frac{24}{t^3}\Rightarrow t^3\le 4\Rightarrow t=1$$

Thay t = 1 vào phương trình ta có $5\left(x+y+z\right)+9=6xyz$

Ta cũng có $6=\frac{5}{yz}+\frac{5}{xz}+\frac{5}{xy}+\frac{9}{xyz}\le\frac{24}{z^2}\Rightarrow z^2\le 4\Rightarrow z=1;2$

+ Với z = 1 thì $5\left(x+y\right)+14=6xy \Leftrightarrow 6xy-5x-5v=14$

$\Leftrightarrow 36xy-30x-30y+25=109 \Leftrightarrow \left(6x-5\right)\left(6y-5\right)=109.1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}6x-5=109\\6x-5=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=19\\y=1\end{array}\right.$$

+ Với z = 2 giải tương tự, không có nghiệm nguyên dương.

Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là $\left(x;y;z;t\right)=\left(19;1;1;1\right)$ và các hoán vị $\left(1;1;1;19\right);\left(1;1;19;1\right);\left(1;19;1;1\right)$

1.9. a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2\left(y^2-3\right)-2y^2\left(x-1\right)+6x=7$;

b) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $xy^2+2xy-27y+x=0$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $PT \Leftrightarrow x^2\left(y^2-3\right)-2y^2x+2y^2+6x=7$

$\Leftrightarrow x^2\left(y^2-3\right)-2x\left(y^2-3\right)+2\left(y^2-3\right)=1 \Leftrightarrow \left(y^2-3\right)\left(x^2-2x+2\right)=1$

Do $x,y \in \mathbb{Z}$ nên $y^2-3 \in \mathbb{Z}; x^2-2x+2 \in \mathbb{Z}$ Vì thế

$$\begin{cases} y^2-3=1 \\ x^2-2x+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=4 \\ \left(x-1\right)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-2 \end{array}\right. \\ x=1 \end{cases}$$

Và $\begin{cases} y^2-3=-1 \\ x^2-2x+2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=2 \\ \left(x-1\right)^2+2=0 \end{cases}$ (không có nghiệm nguyên)

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là $\left(x;y\right)=\left(1;-2\right);\left(1;2\right)$

b) $xy^2+2xy-27y+x=0 \Leftrightarrow x\left(y^2+2y+1\right)=27y$

$$\Leftrightarrow x\left(y+1\right)^2=27y \Rightarrow x=\frac{27y}{\left(y+1\right)^2}$$

Ta biết hai số nguyên dương y và y + 1 nguyên tố cùng nhau nên $y \not\vdots \left(y+1\right)^2$ vì thế $27 \vdots \left(y+1\right)^2 \Rightarrow \left(y+1\right)^2=1$ hoặc $\left(y+1\right)^2=9$

Từ đó tìm được nghiệm của phương trình là $\left(x;y\right)=\left(6;2\right)$

1.10. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình

a) $x^2+5y^2+1=2y\left(2x-1\right)$;

b) $x^2+2y^2+2xy+2x-2y+5=0$;

c) $2x^2+2y^2+z^2-6x+9=2y\left(x+z\right)$;

d) $x^2+3y^2+4z^2+2xy-4yz-12y+36=0$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Chú ý nếu $A^2+B^2+C^2=0$ thì $A=0;B=0$ và $C=0$

a) Biến đổi PT thành $\left(x-2y\right)^2+\left(y+1\right)^2=0$. Nghiệm $\left(x;y\right)=\left(-2;-1\right)$

b) Biến đổi PT thành $\left(x+y+1\right)^2+\left(y-2\right)^2=0$. Nghiệm $\left(x;y\right)=\left(-3;2\right)$

c) Biến đổi PT thành $\left(x-y\right)^2+\left(y-z\right)^2+\left(x-3\right)^2=0$. Nghiệm $\left(x;y;z\right)=\left(3;3;3\right)$

d) Biến đổi PT thành $\left(x+y\right)^2+\left(y-2z\right)^2+\left(y-6\right)^2=0$. Nghiệm $\left(x;y;z\right)=\left(-6;6;3\right)$

1.11. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x+x^2+x^3=\left(y-1\right)\left(y^2+y+1\right)$

Hướng dẫn giải – đáp số

Biến đổi về dạng $1+x+x^2+x^3=y^3$. Ta xét các trường hợp:

1) x = 0 thì y = 1 2) x = - 1 thì y = 0

3) x = 1 thì $y \notin \mathbb{Z}$

4) Với $x>0$ $(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3>1+x+x^2+x^3=y^3>x^3$

Vậy $(1+x)^3>y^3>x^3$ hay $1+x>y>x$ điều này không thể xảy ra đối với số nguyên dương

5) Với $x<-1$. Đặt $t=-1-x$ thì $t>0$ và $x=-1-t$. Thay vào phương trình ta có

$1+(-1-t)+(t^2+2t+1)-(t^3+3t^2+3t+1)=y^3$

Hay $-(t^3+2t^2+2t)=y^3 \Rightarrow y<0$ hay $t^3+2t^2+2t=(-y)^3$

Đặt $-y=z$ ta có $t^3+2t^2+2t=z^3$ với $z>0$

Ta có $(t+1)^3=t^3+3t^2+3t+1>t^3+2t^2+2t=z^3>t^3$

Hay $(t+1)^3>z^3>t^3 \Rightarrow t+1>z>t$ điều này vô lý

Vậy phương trình chỉ có 2 nghiệm $(x;y)=(0;1);(-1;0)$

1.12. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(x+1)(x+2)(x+8)(x+9)=y^2$.

Hướng dẫn giải – đáp số

* Với y = 0 thì $x=-1;-2;-8;-9$

* Với $y\neq 0$ ta có $(x^2+10x+9)(x^2+10x+16)=y^2$

Đặt $x^2+10x+9=z\in\mathbb{Z}$ do $x\in\mathbb{Z}$. Ta có $z(z+7)=y^2$ hay $z^2+7z=y^2$

Nếu $z>9$ thì $z^2+6z+9<z^2+7z=y^2<z^2+8z+16$

Hay $(z+3)^2<z^2+7z=y^2<(z+4)^2$ vô lý. Vậy $z\leq 9$

$x^2+10x+9\leq 9 \Leftrightarrow x(x+10)\leq 0 \Leftrightarrow -10\leq x\leq 0$. Lần lượt thay các giá trị của x ta có nghiệm:

$(x;y)=(-1;0);(-2;0);(-8;0);(-9;0);(-5;-12);(-5;12);(-10;-12);(-10;12)$

1.13. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^3-2y^3-4z^3=0$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta sử dụng tính chất chia hết và phương pháp xuống thang đế giải.

Giả sử $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ là nghiệm nguyên của phương trình tức là $x_0^3-2y_0^3-4z_0^3=0$ (2) khi đó $x \vdots 2$. Đặt $x_0=2x_1$ ta lại có $4x_1^3-y_0^3-2z_0^3=0$; Đặt $y_0=2y_1$ ta lại có $2x_1^3-4y_1^3-z_0^3=0$; Đặt $z_0=2z_1$ ta lại có

$x_1^3 - 2y_1^3 - 4z_1^3 = 0$; như vậy $(x_1; y_1; z_1) = \left(\frac{x_0}{2}; \frac{y_0}{2}; \frac{z_0}{2}\right)$ cũng là nghiệm của phương trình . Cứ tiếp tục mãi ta có $\left(\frac{x_0}{2^k}; \frac{y_0}{2^k}; \frac{z_0}{2^k}\right) \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{Z}$ do đó $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

Vậy phương trình (1) có nghiệm nguyên duy nhất là $(0;0;0)$

1.14. Tìm số có hai chữ số mà số ấy là bội của tích hai chữ số đó.

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi số có hai chữ số đó là $\overline{xy}(x, y \in \mathbb{N}; 0 < x, y \le 9)$

Ta có $\overline{xy} = 10x + y = kxy(k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow y = x(ky - 10) \vdots x$ do đó $y = mx$

$\Rightarrow mx = x(kmx - 10) \Rightarrow m = kmx - 10 \Rightarrow 10 = m(kx - 1) \Rightarrow m = 1; 2; 5$

Với m = 1 thì $kx = 11 \Rightarrow x = y = 1$

Với m = 2 thì $kx = 6 \Rightarrow x = 1; 2; 3$ tương ứng với $y = 2; 4; 6$

Với m = 5 thì $kx = 3 \Rightarrow x = 1$ tương ứng có $y = 5$

Số cần tìm là $\overline{xy} = 11; 12; 24; 36; 15$

1.15. Tìm tất cả các hình chữ nhật với độ dài các cạnh là số nguyên dương có thể cắt thành 11 hình vuông bằng nhau sao cho mỗi cạnh hình vuông là một số nguyên dương không lớn hơn 3.

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi chiều dài, chiều rộng hình chữ nhật lần lượt là x và y. Cạnh hình vuông cần cắt ra là z.

Ta có $x; y; z \in \mathbb{Z}^+$ $x \ge y; z \le y$ và $z \le 3$

Ta có $xy = 11z^2$ (1) .Từ (1) $\Rightarrow$ x hoặc y chia hết cho 11. Vai trò của x và y trong phương trình như nhau nên ta giả sử $x \vdots 11$ tức là $x = 11d$

$\Rightarrow 11dy = 11z^2 \Rightarrow dy = z^2$. Ta xét các trường hợp có thể của z:

Với z = 1 chỉ có thể $d = 1; y = 1 \Rightarrow x = 11$

Với z = 2 chỉ có thể $d = 1; y = 4 \Rightarrow x = 11$

$d = 2; y = 2 \Rightarrow x = 22$

$d = 4; y = 1 \Rightarrow x = 44$

Với z = 3 chỉ có thể $d = 1; y = 9 \Rightarrow x = 11$

$d = 3; y = 3 \Rightarrow x = 33$

$d = 9; y = 1 \Rightarrow x = 99$

Trong 7 nghiệm của phương trình vừa tìm chỉ có 3 nghiệm thỏa mãn bài toán đó là

$(x; y) = (11; 1); (22; 2); (33; 3)$

1.16. a) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $\frac{xy}{3z}+\frac{yz}{3x}+\frac{zx}{3y}=1$;

b) Tìm ba số nguyên dương sao cho tổng các nghịch đảo của chúng bằng $\frac{11}{12}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Vai trò x; y; z như nhau. Ta giả sử $x \geq y \geq z \geq 1$

Ta có: $\frac{xy}{3z}+\frac{yz}{3x}+\frac{zx}{3y}=1 \Leftrightarrow \frac{xy}{3z}+\frac{z}{3}\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)=1$

Với $x, y > 0$ thì $\left(x-y\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$

Do đó $1=\frac{xy}{3z}+\frac{z}{3}\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right) \geq \frac{z}{3}+\frac{2z}{3}=z \Rightarrow z=1 \Rightarrow y=x=1$

Vậy $\left(x;y;z\right)=\left(1;1;1\right)$

b) Gọi ba số nguyên dương cần tìm là x; y; z. Ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{11}{12}$

Vai trò x; y; z như nhau. Ta giả sử $x \geq y \geq z > 1$. Ta có $\frac{3}{z} \geq \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{11}{12} \Rightarrow z \leq \frac{36}{11} \Rightarrow z=2;3$

Với z = 2 thay vào và lý luận tương tự ta tìm được $\left(y=3;x=12\right);\left(y=4;x=6\right)$

Với z = 3 ta tìm được $\left(y=3;x=4\right)$

Nghiệm thỏa mãn bài toán là $\left(x;y;z\right)=\left(12;3;2\right);\left(6;4;2\right);\left(4;3;3\right)$ cùng các hoán vị của chúng.

1.17. Chứng minh phương trình $2x^2-9y^2=11$ không có nghiệm nguyên.

Hướng dẫn giải – đáp số

Giả sử phương trình có nghiệm nguyên là $(x_0;y_0)$ ta có

$2x_0^2-9y_0^2=11 \Rightarrow y_0$ lẻ tức là $y_0=2k+1\left(k \in \mathbb{N}^*\right)$.

Ta có $2x_0{}^2-9(2k+1)^2=11 \Rightarrow x^2-18k\left(k+1\right)=10 \Rightarrow x_0$ chẵn tức là $x_0=2m\left(m \in \mathbb{N}^*\right)$. Tức là

$4m^2-18k\left(k+1\right)=10 \Rightarrow 2m^2-9k\left(k+1\right)=5$ vô lý vì $k\left(k+1\right)$ là tích hai số nguyên liên tiếp nên chẵn. Vế trái chẵn, vế phải lẻ

Do đó phương trình $2x^2-9y^2=11$ không có nghiệm nguyên.

1.18. Chứng minh phương trình $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2016}$ có môt số hữu hạn nghiệm nguyên dương.

Hướng dẫn giải – đáp số

Vai trò x; y; z như nhau ta giả sử $0 < x \le y \le z$. Ta có $\frac{1}{x} < \frac{1}{2016} \Rightarrow x > 2016$

Ta có $\frac{1}{2016} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \le \frac{3}{x} \Rightarrow 2016 < x \le 3.2016$

Vậy có hữu hạn số nguyên dương x. Ứng với mỗi giá trị của x ta có:

$$\frac{1}{2016} - \frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \le \frac{2}{y} \Rightarrow y \le \frac{2.2016x}{x-2016} \le \frac{2.2016x}{1} \le 2.2016^2$$

Vậy y hữu hạn $\Rightarrow$ z hữu hạn. Do đó phương trình có một số hữu hạn nghiệm nguyên dương.

1.19. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $8x^2y^2 + x^2 + y^2 = 10xy$

(Đề thi tuyển sinh THPT khối chuyên Toán và chuyên Tin ĐHQG Hà Nội, năm 2006)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $8x^2y^2 + x^2 + y^2 = 10xy \Leftrightarrow 8xy\left(xy-1\right) + \left(x-y\right)^2 = 0$ (*)

Do $\left(x-y\right)^2 \ge 0$ nên nếu x, y là nghiệm nguyên của phương trình thì $xy\left(xy-1\right) \le 0 \Rightarrow 0 \le xy \le 1$

Do x, y nguyên nên chỉ có hai khả năng:

- Nếu xy = 0 thì từ (*) ta có $x = y = 0$

- Nếu xy = 1 thì từ (*) ta có $x = y = \pm 1$.

Phương trình có 3 nghiệm nguyên $\left(x;y\right)$ là $\left(0;0\right);\left(1;1\right);\left(-1;-1\right)$

1.20. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết rằng khi chia số đó cho 2005 thì dược dư là 23 còn khi chia số đó cho 2007 thì được dư 32.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên ĐHSP TP Hồ Chí Minh, năm học 2007 - 2008)

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi số tự nhiên cần tìm là n. Ta có

$$n = 2005x + 23 = 2007y + 32 = 2005y + 2y + 32 \quad \left(x;y \in \mathbb{N}\right)$$

$$\Rightarrow 2y + 9 = 2005\left(x-y\right) = 2005k \quad \left(k \in \mathbb{N}^*\right) \Rightarrow y = \frac{2005k-9}{2}$$

n nhỏ nhất khi y nhỏ nhất, y nhỏ nhất là 998 khi k = 1.

Vậv số tự nhicn nhỏ nhất cần tìm là $n = 2007.998 + 32 = 2003018$

1.21. Một đoàn học sinh đi cắm trại bằng ô tô. Nếu mỗi ô tô chở 22 người thì thừa 1 người. Nếu bớt đi 1 ô tô thì có thể phân phối đều tất cả các học sinh lên các ô tô còn lại. Hỏi có bao nhiêu học sinh đi cắm trại và có bao nhiêu ô tô? Biết rằng mỗi ô tô chỉ chở không quá 30 người.

(Thi học sinh giỏi lớp 9 Thừa Thiên - Huế, năm học 2008 - 2009)

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi số ô tô lúc đầu là x ($x \in \mathbb{N}$ và $x \ge 2$), số học sinh đi cắm trại sẽ là $22x + 1$.

Theo giả thiết nếu số xe là $x-1$ thì số học sinh phân phối đều cho tất cả các xe.

Khi đó mỗi xe chở y học sinh ($y \in \mathbb{N}$ và $30 \geq y > 0$), ta có

$$\left(x-1\right)y = 22x+1 \Leftrightarrow y = \frac{22x+1}{x-1} = 22 + \frac{23}{x-1}$$

Vì $x, y \in \mathbb{N}$ nên $x-1$ phải là ước số của 23, 23 nguyên tố nên:

* $x-1=1 \Leftrightarrow x=2$ suy ra $y = 22+23 = 45$ (trái giả thiết)

* $x-1=23 \Leftrightarrow x=24$ suy ra $y = 22+1 = 23 < 30$.

Vậy ô tô là 24 và số học sinh là $22.24+1=529$.

1.22. Tìm cặp số tự nhiên (m; n) thỏa mãn hệ thức $m^2+n^2=m+n+8$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định, năm học 2011 - 2012)

Hướng dẫn giải – đáp số

Do $m,n \in \mathbb{N}$ nên $m^2+n^2=m+n+8 \Leftrightarrow 4\left(m^2+n^2\right)=4\left(m+11+8\right)$

$$\Leftrightarrow \left(4m^2-4m+1\right)+\left(4n^2-4n+1\right)=34 \Leftrightarrow \left(2m-1\right)^2+\left(2n-1\right)^2=3^2+5^2 \text{ (*)}$$

Từ (*) $\Rightarrow \begin{cases}2m-1=3\\2n-1=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=2\\n=3\end{cases}$ và $\begin{cases}2n-1=3\\2m-1=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}n=2\\m=3\end{cases}$

Có hai cặp số $\left(m;n\right)$ là $\left(2;3\right)$ và $\left(3;2\right)$

1.23. Tìm các cặp số nguyên $\left(x;y\right)$ thỏa mãn $5x^2+8y^2=20412$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên KHTN- ĐHQG Hà Nội, năm học 2013 - 2014)

Hướng dẫn giải – đáp số

Nhận xét: Với a, b là các số nguyên thỏa mãn $a^2+b^2 \vdots 3$ thì $a \vdots 3$ và $b \vdots 3$.

Ta có $5x^2+8y^2=20412 \Leftrightarrow \left(6x^2+9y^2\right)-\left(x^2+y^2\right)=28.9^3$

Suy ra $x^2+y^2 \vdots 3 \Leftrightarrow x \vdots 3$ và $y \vdots 3$. Đặt $x=3x_1; y=3y_1\left(x_1;y_1 \in \mathbb{Z}\right)$

Thay vào phương trình ta được $5{x_1}^2+8{y_1}^2=28.9^2$

Tương tự ta có $x_1=3x_2; y_1=3y_2\left(x_2;y_2 \in \mathbb{Z}\right)$ ta được $5{x_2}^2+8{y_2}^2=28.9$

Tương tự ta có $x_2=3x_3; y_2=3y_3\left(x_3;y_3 \in \mathbb{Z}\right)$ ta được $5{x_3}^2+8{y_3}^2=28$

Suy ra $y_3^2 \leq \frac{28}{8} < 2^2$ nên $y_3^2=0$ hoặc $y_3^2=1$

* Với $y_3^2=0$ thì $x_3^2=\frac{28}{5}$ (loại)

* Với $y_3^2=1$ thì $x_3^2=2^2 \Rightarrow x_2^2=9.2^2; y_2^2=9 \Rightarrow x_1^2=9^2.2^2; y_1^2=9^2 \Rightarrow x^2=9^3.2^2; y^2=9^3$

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn là $(54; 27); (54; -27); (-54; 27); (-54; -27)$

1.24. Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $6x^2 + 5y^2 = 74$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định, năm học 2014 - 2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ điều kiện đã cho $6x^2 + 5y^2 = 74 \Rightarrow y$ chẵn và $x \neq 0; y \neq 0$

Nếu cặp số $(x_0; y_0)$ là một cặp số nguyên thỏa mãn điều kiện thì các cặp số $(x_0; -y_0); (-x_0; y_0); (-x_0; -y_0)$ cũng thỏa mãn điều kiện, do đó chỉ cần xét $x > 0, y > 0$. Từ điều kiện suy ra

$5y^2 < 74 \Rightarrow y^2 < 15 \Rightarrow 0 < y < 4 \Rightarrow y = 2$ (vì y chẵn) $\Rightarrow x = 3$

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện là $(3; 2); (3; -2); (-3; 2); (-3; -2)$.

1.25. Tìm các số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn phương trình $(x + y)^5 = 120y + 3$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh , năm học 2013 - 2014)

Hướng dẫn giải – đáp số

Do $x; y \in \mathbb{N}^*$ nên ta có $(x + y)^5 = 120y + 3 < 120(x + y) \Rightarrow (x + y)^4 < 120 < 4^4 \Rightarrow x + y < 4$

Cũng do $x; y \in \mathbb{N}^*$ nên $2 \leq x + y < 4$ mà $120y + 3$ là số lẻ $\Rightarrow x + y$ là số lẻ

Do đó $x + y = 3$. Vì vậy $3^5 = 120y + 3 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 1$

Nghiệm nguyên dương của phương trình là $(x; y) = (1; 2)$

1.26. Tìm tất cả các số nguyên dương $(x; y)$ sao cho $3^x - 2^y = 1$.

(Đề thi tuyên sinh vào lớp 10 chuyên trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh, năm học 2014 - 2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $3^x - 2^y = 1 \Leftrightarrow 3^x - 1 = 2^y$ (1)

* Nếu x chẵn tức là $x = 2k\,(k \in \mathbb{N}^*)$. Từ (1) ta có $(3^k + 1)(3^k - 1) = 2^y$

Do đó $\begin{cases} 3^k + 1 = 2^a \\ 3^k - 1 = 2^b \end{cases}$ trong đó $a, b \in \mathbb{N}$ và $a > b$

Xét $2^a - 2^b = (3^k + 1) - (3^k - 1) = 2 \Rightarrow 2^b(2^{a-b} - 1) = 2$ nên

$\begin{cases} 2^{a-b} - 1 = 1 \\ 2^b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{a-b} = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

Do đó $\begin{cases} 3^k + 1 = 2^2 \\ 3^k - 1 = 2^1 \end{cases} \Leftrightarrow 2.3^k = 6 \Leftrightarrow 3^k = 3 \Leftrightarrow k = 1$ khi đó $x = 2$

Từ (1) có $2^y = 3^2 - 1 = 8 = 2^3 \Rightarrow y = 3$

* Nếu x lẻ tức là $x = 2k + 1 (k \in \mathbb{N})$

Xét $3^{2k+1} - 1 = 3(3^{2k} - 1) + 2 = 3(9^k - 1) + 2$ chia cho 8 dư 2

Vì $(9^k - 1) \vdots (9 - 1) \Rightarrow 2^y$ chia cho 8 dư 2 $\Rightarrow 2^y = 2 \Rightarrow y = 1$

Ta có $3^x - 1 = 2^1 \Rightarrow x = 1$

Vậy tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ là $(2; 3)$ và $(1; 1)$

1.27. Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2y + xy - 2x^2 - 3x + 4 = 0$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên TP Hà Nội, năm học 2014 - 2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

$4 = x(2x + 3 - y - xy) \Rightarrow 4 \vdots x \Rightarrow x \in \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$ (*)

Từ phương trình $\Rightarrow xy(x + 1) = 2x^2 + 3x - 4 = (x + 1)(2x + 1) - 5$

$\Rightarrow (x + 1)(-xy + 2x + 1) = 5 \Rightarrow 5 \vdots (x + 1) \Rightarrow x \in \{-6; -2; 0; 4\}$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow x \in \{-2; 4\}$

Với x = -2 thì y = -1

Với x = 4 thì y = 2

Vậy có hai cặp $(x; y)$ thỏa mãn là $(-2; -1)$ và $(4; 2)$

1.28. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $3x^2 - 2y^2 - 5xy + x - 2y - 7 = 0$.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh, năm học 2015-2016)

Hướng dẫn giải – đáp số

$3x^2 - 2y^2 - 5xy + x - 2y - 7 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6xy + xy - 2y^2 + x - 2y = 7$

$\Leftrightarrow 3x(x - 2y) + y(x - 2y) + (x - 2y) = 7 \Leftrightarrow (x - 2y)(3x + y + 1) = 7$

Ta có $7 = 7.1 = 1.7 = (-7).(-1) = (-1).(-7)$

Do đó ta xét trường hợp sau: $x - 2y = 7$ (*) và $3x + y + 1 = 1$ (**)

Từ $x - 2y = 7 \Leftrightarrow x = 7 + 2y$ thay vào (**) ta có $3(7 + 2y) + y + 1 = 1 \Leftrightarrow 21 + 7y = 0 \Leftrightarrow y = -3$ thay $y = -3$ vào (*) ta có $x + 6 = 7 \Leftrightarrow x = 1$.

Tương tự với các trường hợp khác ta không tìm được x; y nguyên.

Vậy nghiệm nguyên của phương trình đã cho là $(x; y) = (1; -3)$

Chương IV. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Chuyên đề 21. BẤT ĐẲNG THỨC

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa

* Hệ thức dạng $a > b$ (hay $a < b;\ a \geq b;\ a \leq b$) gọi là bất đẳng thức.

* $a > b \Leftrightarrow a - b > 0;\ a < b \Leftrightarrow a - b < 0$.

2. Tính chất

a) $a > b \Leftrightarrow b < a$

b) Tính chất bắc cầu:

$a > b;\ b > c \Leftrightarrow a > c$

$a < b;\ b < c \Leftrightarrow a < c$

c) Tính chất cộng:

$a > b \Rightarrow a + c > b + c$

$a < b \Rightarrow a + c < b + c$

d) Tính chất nhân:

* $a > b \Leftrightarrow ac > bc$ nếu $c > 0$

$a > b \Leftrightarrow ac < bc$ nếu $c < 0$

$a > b \Leftrightarrow ac = bc$ nếu $c = 0$

* $a < b \Leftrightarrow ac < bc$ nếu $c > 0$

$a < b \Leftrightarrow ac > bc$ nếu $c < 0$

$a < b \Leftrightarrow ac = bc$ nếu $c = 0$

e) Cộng vế với vế của hai bất đẳng thức cùng chiều được một bất đẳng thức cùng chiều.

f) Trừ từng vế của hai bất đẳng thức ngược chiều ta được một bất đẳng thức cùng chiều với bất đẳng thức thứ nhất. (Không được trừ vế với vế của hai bất đẳng thức cùng chiều)

g) $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n \left(n \in \mathbb{N}\right)$;

$|a| > |b| \Rightarrow a^{2n} > b^{2n}$;

$a > b \Rightarrow a^{2n+1} > b^{2n+1}$.

h) Với $m > n > 0$ nếu $a > 1 \Rightarrow a^m > a^n$;

$a = 1 \Rightarrow a^m = a^n$;

$0 < a < 1 \Rightarrow a^m < a^n$.

i) Nếu $ab > 0$ và $a > b$ thì $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$

3. Các phương pháp chứng minh $A > B$; ($A < B$ tương tự):

1) Dùng định nghĩa chứng minh $A - B > 0$ (*Xét hiệu hai vế*).

2) *Biến đổi tương đương*: $A > B \Leftrightarrow A_1 > B_1 \Leftrightarrow A_2 > B_2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow A_n > B_n$;

Nếu $A_n > B_n$ đúng thì $A > B$ đúng.

3) *Phản chứng*: Giả sử $A \leq B$ dẫn tới một điều vô lý. Vậy $A > B$.

4) *Chứng minh bằng quy nạp toán học:*

+ *Bước 1:* Chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = n_0$.

+ *Bước 2:* Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$ $(k \ge n_0)$, ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

Từ đó kết luận bất đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên $n \ge n_0$.

(Phương pháp quy nạp toán học thường được sử dụng khi trong bất đẳng thức có sự tham gia của *n* với vai trò của một số nguyên dương tùy ý hoặc số nguyên dương lấy mọi giá trị bắt đầu từ n_0 nào đó).

5) *Phương pháp tổng hợp*:

+ Sử dụng tính chất và các hằng bất đẳng thức.

+ Sử dụng tính chất bắc cầu (làm trội) $A > C;\ C > B \Rightarrow A > B$.

4. Một số hằng bất đẳng thức

a) $a^2 \ge 0\ \forall a$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$;

b) $|a| \ge a\ \forall a$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a > 0$;

c) Bất đẳng thức giá trị tuyệt đối:

* $|a+b| \le |a| + |b|$ (Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ab \ge 0$).

* $|a-b| \ge |a| - |b|$ (Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ab \ge 0$ và $|a| \ge |b|$).

d) Bất đẳng thức tam giác: với *a*; *b*; *c* là 3 cạnh tam giác:

$a + b > c;\ a - b < c$

e) Bất đẳng thức Cauchy (*Augustin Louis Cauchy [1789 – 1857 nhà toán học Pháp]*: Với *n* số không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ ta có:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^n \ge a_1 a_2 ... a_n.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$.

* *Chú ý*: Vài dạng bất đẳng thức cụ thể hay gặp có thể sử dụng như bổ đề:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \ge ab \text{ hay } (a+b)^2 \ge 4ab;\ a^2 + b^2 \ge 2ab.$$

f) Bất đẳng thức Bunyakovsky *[Victor Yakovlevich Bunyakovsky (1804 – 1889) nhà toán học Nga]*.

Với mọi bộ *n* số $(a_1; a_2; ...; a_n); (b_1; b_2; ...; b_n)$, ta có:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \exists t$ để $a_i = t b_i \left(i = \overline{1,n}\right)$. Nếu $b_i \ne 0$ thì dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = ... = \dfrac{a_n}{b_n}$.

* *Chú ý*: Dạng cụ thể hay gặp $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \ge (ax + by)^2$.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho a và b là hai số bất kỳ chứng minh rằng

$$ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{2}$$

* *Tìm cách giải*: Bài toán này thực chất gồm hai bài toán: Chứng minh

1) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{2}$ (1); 2) $ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra kết quả.

Với mỗi câu 1) hoặc 2) ta đều có thể dùng 4 cách: Biến đổi tương đương; Xét hiệu hai vế; phản chứng và tổng hợp.

Giải

Ta chứng minh

1) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{2}$ bằng cả 4 cách:

Cách 1: Biến đổi tương đương:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \le \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \le 2a^2+2b^2 \Leftrightarrow -a^2+2ab-b^2 \le 0$$

$\Leftrightarrow -\left(a^2-2ab+b^2\right) \le 0 \Leftrightarrow -\left(a-b\right)^2 \le 0$ (hiển nhiên đúng).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

Cách 2: Xét hiệu

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{a^2+2ab+b^2-2a^2-2b^2}{4} = \frac{-\left(a-b\right)^2}{4} \le 0$$

Vậy $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

Cách 3: Phản chứng

Giả sử $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 > 2a^2+2b^2$

$\Leftrightarrow -a^2+2ab-b^2 > 0 \Leftrightarrow -\left(a^2-2ab+b^2\right) > 0 \Leftrightarrow -\left(a-b\right)^2 > 0$ vô lý.

Vậy $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

Cách 4: Tổng hợp:

Ta có: $\left(a-b\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow -\left(a^2-2ab+b^2\right) \le 0 \Leftrightarrow -a^2+2ab-b^2 \le 0$

$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \le 2a^2+2b^2 \Leftrightarrow \dfrac{a^2+2ab+b^2}{4} \le \dfrac{a^2+b^2}{2}$

Hay $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \le \dfrac{a^2+b^2}{2}$ (1). Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

2) Chứng minh: $ab \le \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ $(2) \Leftrightarrow 4ab \le a^2+2ab+b^2$

$\Leftrightarrow 0 \le a^2-2ab+b^2 \Leftrightarrow 0 \le (a-b)^2$ hiển nhiên đúng.

Từ (1) và (2) suy ra $ab \le \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \le \dfrac{a^2+b^2}{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

* *Nhận xét:* $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \ge ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \ge 4ab$;

Từ bài toán a) ta có thể suy ra $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^4 \le \dfrac{a^4+b^4}{2}$

Thật vậy do $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \le \dfrac{a^2+b^2}{2}$ hai vế bất đẳng thức đều dương nên bình phương hai vế ta có $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^4 \le \left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)^2$ (1); cũng có bài toán a) ta lại có $\left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)^2 \le \dfrac{a^4+b^4}{2}$ (2). Từ (1) và (2) ta có: $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^4 \le \dfrac{a^4+b^4}{2}$.

Ví dụ 2: a) Chứng minh rằng $(a-9)(a-8)(a-7)(a-6) \ge -1\ \forall a$

b) Chứng minh $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \ge (ax+by)^2\ \ \forall a,b$ và x,y.

Áp dụng chứng minh $(2x+3y-3z)^2 \le 13(x^2+y^2+z^2-2yz)$.

* *Tìm cách giải*: a) Hoán vị nhân tử $(a-6)$ ở vế trái và thực hiện phép nhân $(a-6)(a-9)$ và $(a-8)(a-7)$ ta thấy xuất hiện a^2-15a ở hai kết quả, ta nghĩ đến việc đặt ẩn phụ. Ta xét hiệu hai vế để chứng minh.

b) Xét hiệu hai vế và biến đổi.

Giải

a) Xét hiệu $(a-9)(a-6)(a-8)(a-7)-(-1)$

$=(a^2-15a+54)(a^2-15a+56)+1$

Đặt $a^2-15a+55=b$ thì biểu thức trên bằng $(b-1)(b+1)+1=b^2 \ge 0$

Vậy $(a-9)(a-8)(a-7)(a-6) \ge -1$.

b) Xét hiệu $\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)-\left(ax+by\right)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-a^2x^2-2axby-b^2y^2$

$=a^2y^2-2aybx+b^2x^2=\left(ay-bx\right)^2\geq 0$

Vậy $\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)\geq\left(ax+by\right)^2$ $\forall a,b$ và x,y. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ax=by$.

Áp dụng: Ta viết bất đẳng thức $\left(2x+3z-3t\right)^2\leq 13\left(x^2+z^2+t^2-2zt\right)$

Dưới dạng $\left[2x+3\left(z-t\right)\right]^2\leq\left(2^2+3^2\right)\left[x^2+\left(z^2-2zt+t^2\right)\right]$

Hay $\left[2x+3\left(z-t\right)\right]^2\leq\left(2^2+3^2\right)\left[x^2+\left(z-t\right)^2\right]$

Đặt $z-t=y$ thì $\left(2^2+3^2\right)\left(x^2+y^2\right)\geq\left(2x+3y\right)^2$ đúng theo bất đẳng thức vừa chứng minh ở trên.

Ví dụ 3:

a) Chứng minh tổng các bình phương của hai số bất kỳ không nhỏ hơn hai lần tích hai số đó.

b) Chứng minh với $x>0$ thì $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$ (tổng một số dương với nghịch đảo của nó không nhỏ hơn 2).

c) Chứng minh với a,b,c,d là các số dương và thỏa mãn $abcd=1$ thì $ab+cd\geq 2$ và $a^2+b^2+c^2+d^2\geq 4$.

* *Tìm cách giải*: a) Lưu ý $\left(a-b\right)^2\geq 0$

b) Khử mẫu, chuyển vế xuất hiện hằng bất đẳng thức.

c) Lưu ý do $abcd=1$ nên $cd=\dfrac{1}{ab}$, sử dụng kết quả b) để chứng minh.

Giải

a) Gọi hai số *a* và *b*. Hiển nhiên $\left(a-b\right)^2\geq 0\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\geq 0$

$\Leftrightarrow a^2+b^2\geq 2ab$

b) Với $x>0$; $x+\dfrac{1}{x}\geq 2\Leftrightarrow x^2-2x+1\geq 0\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2\geq 0$ đúng.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

c) Đặt $ab=x$. Do $a,b,c,d>0$ và $abcd=1$ nên $cd=\dfrac{1}{ab}$

$\Rightarrow ab+cd=ab+\dfrac{1}{ab}=x+\dfrac{1}{x}\geq 2$

* Ta luôn có $a^2+b^2\geq 2ab$ và $c^2+d^2\geq 2cd$

Nên $a^2+b^2+c^2+d^2\geq 2\left(ab+cd\right)\geq 4$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d=1$.

Ví dụ 4:

a) Chứng minh $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca,\ \forall a;b;c$

b) Chứng minh $a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ca)$ với $a;b;c$ là 3 cạnh một tam giác.

* *Tìm cách giải*:

a) Bất đẳng thức có a^2+b^2 ta nghĩ tới sử dụng bất đẳng thức $a^2+b^2 \ge 2ab,\ldots$

b) Với *a*, *b*, *c* là ba cạnh của tam giác phải sử dụng bất đẳng thức tam giác.

Giải

a) Ta có $a^2+b^2 \ge 2ab;\ b^2+c^2 \ge 2bc;\ c^2+a^2 \ge 2ac$.

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức cùng chiều trên ta có

$2(a^2+b^2+c^2) \ge 2(ab+bc+ca) \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

b) Áp dụng bất đẳng thức về ba cạnh trong một tam giác:

$|b-c| < a \Leftrightarrow (b-c)^2 < a^2$

$|c-a| < b \Leftrightarrow (c-a)^2 < b^2$

$|a-b| < c \Leftrightarrow (a-b)^2 < c^2$

Do đó $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2 < a^2+b^2+c^2$

$\Leftrightarrow b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2+a^2-2ab+b^2 < a^2+b^2+c^2$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ca)$.

* *Chú ý*: a) Ta còn cách rất hay sử dụng: biến đổi tương đương:

$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca \Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2 \ge 2ab+2bc+2ca$

$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ac+c^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0$ hiển nhiên đúng.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 5:

a) Chứng minh rằng với ba số a,b,c tùy ý ta luôn có:

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \ge ab+bc+ca$$

b) Chứng minh $(3a)^2+(3b)^2+(3c)^2 \ge 3$ với $a+b+c=1$.

* *Tìm cách giải*:

a) Ta có $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$. Do đó có thể biến đổi tương đương bằng cách nhân hai vế với 3 rồi xét hiệu hai vế.

b) Khó chứng minh trực tiếp. Ta đổi biến để chứng minh.

Giải

a) $\dfrac{(a+b+c)^2}{3} \ge ab+bc+ca \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \ge 3ab+3bc+3ca$

Xét hiệu

$(a+b+c)^2 - 3ab - 3bc - 3ca = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc-3ab-3ac-3bc$

$= a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc = \dfrac{1}{2}\left(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ac+a^2\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \ge 0$. Chứng tỏ $\dfrac{(a+b+c)^2}{3} \ge ab+bc+ca$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

* *Chú ý*: a) Có thể biến đổi tương đương tiếp từ $(a+b+c)^2 \ge 3ab+3bc+3ca$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc) \ge 3(ab+ac+bc)$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \ge ab+ac+bc$ bất đẳng thức đã được chứng minh ở ví dụ 4.

Ta có thể dùng các cách khác (phản chứng, tổng hợp đều được).

b) *Cách 1*: Đặt $3a = 1+3x;\ 3b = 1+3y;\ 3c = 1+3z$.

Do $a+b+c=1$ mà $3(a+b+c) = 3+3(x+y+z)$. Suy ra $x+y+z=0$.

Ta có: $(3a)^2+(3b)^2+(3c)^2 = (1+3x)^2+(1+3y)^2+(1+3z)^2$

$= 1+6x+x^2+1+6y+y^2+1+6z+z^2 = 3+6(x+y+z)+\left(x^2+y^2+z^2\right)$

$= 3+\left(x^2+y^2+z^2\right) \ge 3$ (do $x+y+z=0$)

Vậy $(3a)^2+(3b)^2+(3c)^2 \ge 3$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$\left(3^2+3^2+3^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge (3a+3b+3c)^2 = 9(a+b+c)^2 = 9$

$\Rightarrow 27\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge 9 \Rightarrow 9a^2+9b^2+9c^2 \ge 3$

Hay $(3a)^2+(3b)^2+(3c)^2 \ge 3$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Ví dụ 6: Chứng minh nếu $a > -1$ thì với mọi số nguyên dương *n*, ta đều có

$$(1+a)^n \ge 1+na \qquad \text{(\textit{Bất đẳng thức Becnuli})}$$

* *Tìm cách giải*: Bất đẳng thức có sự xuất hiện của *n* với vai trò là một số nguyên dương tùy ý. Ta sử dụng phương pháp quy nạp toán học để chứng minh.

Giải

Với $n=1$ ta có $(1+a)=1+a$ hiển nhiên đúng.

Giả sử bài toán đúng với số nguyên dương $n=k$ tức là $(1+a)^k \geq 1+ka$.

Nhân hai vế với số dương $(1+a)$ ta có $(1+a)^{k+1} \geq (1+ka)(1+a)$. Ta có

$(1+ka)(1+a)=1+a+ka+ka^2=1+(k+1)a+ka^2 \geq 1+(k+1)a$

Vậy $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$

Bài toán đúng với mọi số nguyên dương $n=(k+1)$. Theo nguyên lý quy nạp bài toán đúng với mọi số nguyên dương *n*.

Ví dụ 7: Với a,b,c là các số dương chứng minh rằng:

a) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4$; b) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$.

* *Tìm cách giải*: Các bất đẳng thức khi biến đổi vế trái đều xuất hiện các số dương nghịch đảo. Do đó ta sử dụng kết quả của ví dụ 3b): một số dương cộng với nghịch đảo của nó không nhỏ hơn 2 khi chứng minh.

Giải

a) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1=2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 4$ vì $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$

(theo ví dụ 3 ta có $\frac{a}{b}$ và $\frac{b}{a}$ là hai số dương nghịch đảo của nhau).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

b) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1$

$=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right) \geq 3+2+2+2=9$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

* *Nhận xét*: Từ hai bất đẳng thức trên ta có thể suy ra những bài toán tương tự:

Cho $a,b,c,d,e>0$ chứng minh

$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \geq 16$

$(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right) \geq 25$

Tổng quát cho $a_1;a_2;a_3;...;a_n>0$ ta có

$$\left(a_1+a_2+a_3+...+a_n\right)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_n}\right)\geq n^2,\ \left(n\geq 2;n\in\mathbb{N}\right)$$

Chứng minh:

Ta có: $\left(a_1+a_2+a_3+...+a_n\right)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_n}\right)$

$$=n+\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\right)+\left(\frac{a_1}{a_3}+\frac{a_3}{a_1}\right)+...+\left(\frac{a_1}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\right)+\left(\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_2}\right)+...+\left(\frac{a_2}{a_n}+\frac{a_n}{a_2}\right)+...+\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$$

$$\geq n+2\left(n-1\right)+2\left(n-2\right)+2\left(n-3\right)+...+2.2+2=$$

$$n+2\left[1+2+...+\left(n-1\right)\right]=n+2\times\frac{n\left(n-1\right)}{2}=n+n^2-n=n^2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=a_3=...=a_n$.

Ví dụ 8: Cho $x;y;z>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2}$$

* *Tìm cách giải*: Ta thấy nếu cộng 1 vào mỗi hạng tử ở vế trái, sau khi quy đồng mẫu ta thấy xuất hiện nhân tử chung $\left(x+y+z\right)$. Vì thế ta biến đổi vế trái bằng cách thêm bớt cùng số 3 đưa về các dạng toán đã chứng minh.

Giải

Biến đổi vế trái ta có:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=\left(\frac{x}{y+z}+1\right)+\left(\frac{y}{z+x}+1\right)+\left(\frac{z}{x+y}+1\right)-3$$

$$=\left(\frac{x+y+z}{y+z}+\frac{x+y+z}{z+x}+\frac{x+y+z}{x+y}\right)-3=\left(x+y+z\right)\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\right)-3$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(x+y\right)+\left(y+z\right)\left(z+x\right)\right]\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\right)-3\geq\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}$$

[Áp dụng kết quả ví dụ 7b với $\left(x+y\right)=a;\left(y+z\right)=b;\left(z+x\right)=c$].

Ví dụ 9: Cho $a,b,c>0$ chứng minh rằng:

a) $\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\geq 8abc$

b) $3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\geq 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)^2$

* *Tìm cách giải*: Để có $\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$ thử xét $\left(a+b\right)^2\left(b+c\right)^2\left(c+a\right)^2$ vì ta có $\left(x+y\right)^2\geq 4xy$ (bất đẳng thức Cauchy).

Giải

a) Ta có $\left(a+b\right)^2 \ge 4ab$. Tương tự $\left(b+c\right)^2 \ge 4bc$; $\left(c+a\right)^2 \ge 4ca$.

Do $a,b,c>0$ nên 2 vế của cả ba bất đẳng thức đều dương nên ta nhân vế với vế được:

$\left(a+b\right)^2\left(b+c\right)^2\left(c+a\right)^2 \ge 64a^2b^2c^2 \Leftrightarrow \left[\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\right]^2 \ge \left[8abc\right]^2$

$\Leftrightarrow \left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right) \ge 8abc$ do các biểu thưc trong ngoặc [ ] đều dương.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

b) Ta có $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}=\dfrac{a+b+c}{abc}=\dfrac{8\left(a+b+c\right)}{8abc}$

Từ câu a) đã chứng minh $\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\ge 8abc$ ta có:

$\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\ge \dfrac{8\left(a+b+c\right)}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\ge \dfrac{4\left(a+b\right)+4\left(b+c\right)+4\left(c+a\right)}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}$

$\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\right)\ge \dfrac{8}{\left(b+c\right)\left(c+a\right)}+\dfrac{8}{\left(c+a\right)\left(a+b\right)}+\dfrac{8}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)}$ (1)

Mặt khác $\left(a+b\right)^2 \ge 4ab \Leftrightarrow \dfrac{1}{ab}\ge \dfrac{4}{\left(a+b\right)^2}$ tương tự ta có:

$\dfrac{1}{bc}\ge \dfrac{4}{\left(b+c\right)^2}$; $\dfrac{1}{ac}\ge \dfrac{4}{\left(c+a\right)^2} \Rightarrow \dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\ge \dfrac{4}{\left(a+b\right)^2}+\dfrac{4}{\left(b+c\right)^2}+\dfrac{4}{\left(c+a\right)^2}$ (2)

Cộng vế với vế của (1) và (2) áp dụng hằng đẳng thức ở vế phải:

$x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=\left(x+y+z\right)^2$ với $x=\dfrac{1}{a+b}$; $y=\dfrac{1}{b+c}$; $z=\dfrac{1}{c+a}$ ta có:

$3\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\right)\ge 4\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\right)^2$ (3) (đpcm)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 10: Cho $A=\dfrac{1}{5.9}+\dfrac{1}{9.13}+\dfrac{1}{13.17}+...+\dfrac{1}{\left(4n+1\right)\left(4n+5\right)}$ và $n\in\mathbb{N}^*$.

Chứng minh $A<\dfrac{1}{20}$.

* *Tìm cách giải*: Bài toán có số tổng quát *n* với $n\in\mathbb{N}^*$. Ta có thể chứng minh bằng quy nạp toán học. Tuy nhiên từng hạng tử của *A* có quy luật có thể phân tích sau đó rút gọn nên ta sử dụng phương pháp tổng hợp.

Giải

Nhận xét: với $k\in\mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{1}{4}\left[\frac{(4k+5)-(4k+1)}{(4k+1)(4k+5)}\right]=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{4k+5}\right)$$

Do đó: $A=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+...+\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n-5}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4n+5}\right)<\frac{1}{20}$

Ví dụ 11: Chứng minh rằng $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$|x+1012|+|x-1004|\geq 2016$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức $|a+b|\leq|a|+|b|$

$|x+1012|+|x-1004|=|x+1012|+|1004-x|\geq|x+1012+1004-x|=2016$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow -1012<x<1004$.

C. Bài tập vận dụng

21.1.

a) Cho $A=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$. Chứng minh $A\geq 2$ nếu $ab>0$ và $A\leq -2$ nếu $ab<0$;

b) Chứng minh $\forall a,b,c$ thì $\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$;

c) Chứng minh $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3\leq\frac{a^3+b^3}{2}\ \forall a,b\geq 0$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Với $ab>0$. Ta có $(a-b)^2\geq 0\Leftrightarrow a^2+b^2\geq 2ab$

Chia hai vế của bất đẳng thức cho $ab>0$ ta có

$\frac{a^2+b^2}{ab}\geq\frac{2ab}{ab}\Leftrightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

Với $ab<0$. Ta có $(a+b)^2\geq 0\Leftrightarrow a^2+b^2\geq -2ab$. Chia hai vế của bất đẳng thức cho $ab<0$ ta có

$\frac{a^2+b^2}{ab}\leq\frac{-2ab}{ab}\Leftrightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leq -2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=-b$.

b) Chứng minh: Từ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$

$\Rightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 2ab+2ac+2bc$

$\Rightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$\Rightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq(a+b+c)^2$

Chia 2 vế của bất đẳng thức này cho 9 ta có đpcm.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

c) Xét hiệu $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3-\frac{a^3+b^3}{2}=\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-4a^3-4b^3}{8}$

$=\frac{-3a^2(a-b)+3b^2(a-b)}{8}=\frac{-3(a-b)(a^2-b^2)}{8}=\frac{-3(a-b)^2(a+b)}{8}\le 0$ với $a,b\ge 0$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

21.2. Chứng minh rằng:

a) $a^2+b^2+c^2+3\ge 2(a+b+c)$, $\forall a,b,c$;

b) $a^2+b^2+c^2+d^2\ge a(b+c+d)$, $\forall a,b,c,d$.

c) $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ge a(b+c+d+e)$, $\forall a,b,c,d,e$

d) $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd\ge 6$, $\forall a,b,c,d>0$ và $abcd=1$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có nếu nhân, chuyển vế, tách $3=1+1+1$ thì xuất hiện $a^2-2a+1=(a-1)^2$…. Do đó: ta có

$a^2+b^2+c^2+3\ge 2(a+b+c)$

$\Leftrightarrow a^2-2a+1+b^2-2b+1+c^2-2c+1\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\ge 0$ đúng.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

b) Vế phải có $ab+ac+ad$. Nếu nhân 4 vào hai vế, chuyển vế và tách $4a^2=a^2+a^2+a^2+a^2$ kết hợp với các hạng tử khác sẽ xuất hiện hằng đẳng thức.

Do đó Nhân hai vế với 4 ta được $4a^2+4b^2+4c^2+4d^2\ge 4ab+4ac+4ad$

$\Leftrightarrow (a-2b)^2+(a-2c)^2+(a-2d)^2+a^2\ge 0$ đúng.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d=0$.

c) Nhận xét: $ab=2.\frac{a}{2}.b$; $ac=2.\frac{a}{2}.c$; ... do đó ta nghĩ tới việc tách a^2 thành $\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}$ để ghép với b^2,c^2,d^2,e^2. Ta có

$a^2+b^2+c^2+d^2\ge a(b+c+d+e)$

$\Leftrightarrow\left(\frac{a^2}{4}-ab+b^2\right)+\left(\frac{a^2}{4}-ac+c^2\right)+\left(\frac{a^2}{4}-ad+d^2\right)+\left(\frac{a^2}{4}-ae+e^2\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow\left(\frac{a}{2}-b\right)^2+\left(\frac{a}{2}-c\right)^2+\left(\frac{a}{2}-d\right)^2+\left(\frac{a}{2}-e\right)^2\ge 0$ đúng.

* *Chú ý*: Cách khác: Nếu nhân hai vế với 4 ta biến đổi tương đương thành

$(a-2b)^2+(a-2c)^2+(a-2d)^2+(a-2e)^2 \geq 0$ đúng.

d) Với $a,b,c,d>0$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy:

$a^2+b^2 \geq 2ab;\ c^2+d^2 \geq 2cd$ do đó

$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd \geq 3(ab+cd)$

Do $abcd=1 \Rightarrow ab+cd=ab+\dfrac{1}{ab} \geq 2$. Ta có đpcm.

21.3.

a) Cho $a.b.c \neq 0$. Chứng minh $\dfrac{a^3-b^3}{ab^2}+\dfrac{b^3-c^3}{bc^2}+\dfrac{c^3-a^3}{ca^2} \geq 0$;

b) Cho $a,b,c>0$. Chứng minh $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}>1$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Nhận xét $\dfrac{a^3-b^3}{ab^2}=\dfrac{a^2}{b^2}-\dfrac{b}{a}$ … Do đó bất đẳng thức biến đổi thành

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c} \Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b}\right)^2+2\left(\frac{b}{c}\right)^2+2\left(\frac{c}{a}\right)^2 \geq 2.\frac{b}{a}+2.\frac{c}{b}+2.\frac{a}{c}$$

Áp dụng bất đẳng thức $x^2+y^2 \geq 2xy$ có $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}\right)^2 \geq 2.\dfrac{a}{b}.\dfrac{b}{c}=2.\dfrac{a}{c}$.

Xét tương tự rồi cộng vế với vế các bất đẳng thức cùng chiều ta được đpcm.

b) Vì $a,b,c>0$ nên $a+b+c>a+b>0$. Dùng phương pháp làm trội

$\Rightarrow \dfrac{a}{a+b+c}<\dfrac{a}{a+b}$. Tương tự $\dfrac{b}{a+b+c}<\dfrac{b}{b+c}$ và $\dfrac{c}{a+b+c}<\dfrac{c}{c+a}$. Cộng vế với vế ba bất đẳng thức cùng chiều ta được

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}>\frac{a+b+c}{a+b+c}=1.$$

21.4.

a) Chứng minh $\forall x,y>0$, ta có $\dfrac{1}{x+y} \leq \dfrac{1}{4x}+\dfrac{1}{4y}$;

b) Từ đó chứng minh $\forall a,b,c>0$, ta có:

$$\frac{4}{2a+b+c}+\frac{4}{2b+c+a}+\frac{4}{2c+a+b} \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Biến đổi tương đương: $\forall x,y>0$

$$\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4x}+\frac{1}{4y} \Leftrightarrow \frac{1}{x+y} \leq \frac{x+y}{4xy} \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy$$

$\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2 \ge 4xy \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 \ge 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0$ đúng.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y$.

b) Áp dụng bất đẳng thức vừa chứng minh ta có:

$$\frac{1}{2a+b+c} \le \frac{1}{8a}+\frac{1}{4(b+c)}=\frac{1}{8a}+\frac{1}{4b+4c} \le \frac{1}{8a}+\frac{1}{16b}+\frac{1}{16c} \quad (1)$$

Tương tự $\frac{1}{2b+c+a} \le \frac{1}{8b}+\frac{1}{16c}+\frac{1}{16a} \qquad (2)$

$$\frac{1}{2c+a+b} \le \frac{1}{8c}+\frac{1}{16a}+\frac{1}{16b} \qquad (3)$$

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức cùng chiều (1); (2); (3) ta được:

$\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{2b+c+a}+\frac{1}{2c+a+b} \le \frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{4c}$ hay

$$\frac{4}{2a+b+c}+\frac{4}{2b+c+a}+\frac{4}{2c+a+b} \le \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

21.5. Chứng minh:

a) $a^3+b^3+abc \ge ab(a+b+c)$ với $a,b,c>0$;

b) $a^3+b^3+c^3 \ge 3abc$ với $a;b;c \ge 0$;

c) $8\left(a^3+b^3+c^3\right) \ge (a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3$ với $a,b,c>0$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Xét hiệu $a^3+b^3+abc-ab(a+b+c)=(a+b)(a-b)^2 \ge 0$

b) Xét hiệu $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)$

$$=(a+b+c).\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2} \ge 0$$

c) Biến đổi thành

$$4\left(a^3+b^3\right)-(a+b)^3+4\left(b^3+c^3\right)-(b+c)^3+4\left(c^3+a^3\right)-(c+a)^3 \ge 0$$

Xét $4\left(a^3+b^3\right)-(a+b)^3=(a+b)\left[4\left(a^2-ab+b^2\right)-(a+b)^2\right]$

$$=3(a+b)(a-b)^2 \ge 0.$$

Tương tự với $4\left(b^3+c^3\right)-(b+c)^3$ và $4\left(c^3+a^3\right)-(c+a)^3$ ta suy ra đpcm.

21.6. Cho a,b,c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh

a) $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \le 3abc$;

b) $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}<2$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Vai trò a,b,c như nhau, không mất tổng quát giả sử $a\ge b\ge c>0$. Biến đổi bất đẳng thức đã cho được bất đẳng thức tương đương:

$a^3+b^3+c^3+3abc-a^2(b+c)-b^2(c+a)-c^2(a+b)\ge 0$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3abc-a^2b-a^2c-b^2c-b^2a-c^2a-c^2b\ge 0$

$\Leftrightarrow a^2(a-b)+b^2(b-a)+c(2ab-a^2-b^2)+c(c^2-bc+ab-ac)\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)(a^2-b^2)-c(a-b)^2+c(c-a)(c-b)\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b-c)+c(a-c)(b-c)\ge 0$.

Hiển nhiên đúng vì $a\ge b;\ a+b>c;\ a\ge c;\ b\ge c>0$.

b) Trước hết ta chứng minh với x,y,k là các số dương và $\dfrac{x}{y}<1$ thì $\dfrac{x}{y}<\dfrac{x+k}{y+k}$. Thật vậy xét hiệu

$\dfrac{x}{y}-\dfrac{x+k}{y+k}=\dfrac{k(x-y)}{y(y+k)}<0$ do $y(y+k)>0$ và $x-y<0$ (do giả thiết $x<y$).

Do $a<b+c;\ b<c+a;\ c<a+b$ nên ta có:

$\dfrac{a}{b+c}<\dfrac{a+a}{b+c+a};\ \dfrac{b}{c+a}<\dfrac{b+b}{c+a+b};\ \dfrac{c}{a+b}<\dfrac{c+c}{a+b+c}$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức cùng chiều ta được:

$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}<\dfrac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2$.

21.7.

a) Chứng minh $(2x-3)(2x-6)(2x-7)(2x-10)+36\ge 0$. Dấu "=" xảy ra khi nào?

b) $M=x^{2016}-x^{2013}+x^4-x+1>0\ \forall x$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Nhận xét: nếu nhân $(2x-3)$ với $(2x-10)$ và $(2x-6)$ với $(2x-7)$ sẽ cùng xuất hiện $4x^2-26x$. Do đó có thể đặt biến phụ. Biến đổi vế trái

$(2x-3)(2x-6)(2x-7)(2x-10)+36=(4x^2-26x+30)(4x^2-26x+42)+36$

Đặt $4x^2+26x+36=y$ ta có: $(y-6)(y+6)+36=y^2-36+36=y^2\ge 0$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y=0\Leftrightarrow 4x^2-26x+36=0\Leftrightarrow 2x^2-13x+18=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(2x-9)=0\Leftrightarrow x=2;x=4,5$.

b) Ta có $M = x^{2013}\left(x^3-1\right)+x\left(x^3-1\right)+1$

* Với $x \ge 1$ nên $x^3 \ge 1 \Rightarrow x^3-1 \ge 0;\ x^{2013} > 1$ do đó $M > 0 \quad (1)$.

* Với $x < 1$ ta có $M = x^{2016}+x^4\left(1-x^{2009}\right)+(1-x)$

Do $1 > x$ nên $1 > x^{2009}$ hay $1-x^{2009} > 0;\ 1-x > 0;\ x^{2016} > 0;\ x^4 > 0$ nên $M > 0 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ đpcm.

21.8. Cho $a,b,c > 0$ chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b} \ge \frac{15}{2}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có:

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b} = \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \ge 2+2+2=6 \quad (1)$$

Theo chứng minh ở ví dụ 8 thì:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$.

Cách giải khác:

Đặt $A = \dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}$

Ta có $2A = \dfrac{2a}{b+c}+\dfrac{2b}{c+a}+\dfrac{2c}{a+b}+2\left(\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}\right)$

$$= \frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\right)$$

$$= \left(\frac{2a}{b+c}+\frac{b+c}{2a}\right)+\left(\frac{2b}{c+a}+\frac{c+a}{2b}\right)+\left(\frac{2c}{a+b}+\frac{a+b}{2c}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$$

Áp dụng bài toán: với $x > 0$ thì $x+\dfrac{1}{x} \ge 2$ ta có:

$$2A \ge 2+2+2+\frac{3}{2}(2+2+2) = 6+9 = 15 \Rightarrow A \ge \frac{15}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

* Cần tránh sai lầm sau đây khi giải bài toán này:

$$A = \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}$$

$$= \left(\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c+a}+\frac{c+a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a+b}+\frac{b+c}{a}\right)$$

Do $x+\dfrac{1}{x}\ge 2$ với $x>0$ nên $A\ge 2+2+2=6$ kết quả sai. Sai lầm ở chỗ nếu xét riêng từng cặp thì đúng nhưng xét đồng thời cả ba cặp số thì dấu đẳng thức không thể xảy ra vì khi ấy $a=b+c;\ b=c+a;\ c=a+b\Rightarrow a+b+c=2\left(a+b+c\right)$ vô lý.

21.9. Cho $x;y;z$ là các số dương. Chứng minh rằng:

$$2\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)\ge \frac{9}{x+y+x}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Biến đổi thành $\left[\left(x+y\right)+\left(y+z\right)+\left(z+x\right)\right]\left(\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+x}\right)\ge 9$

Đặt $x+y=a;\ y+z=b;\ z+x=c$ ta được

$\left(a+b+c\right)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\ge 9$. (Bạn đọc tự làm tương tự ví dụ 7).

21.10.

a) Chứng minh $\dfrac{2016}{1.3}+\dfrac{2016}{3.5}+\dfrac{2016}{5.7}+...+\dfrac{2016}{2015.2017}<1008$;

b) Biết $n!=1.2.3.....\left(n-1\right)n\ \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$. Chứng minh $G<1$ với

$$G=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{2015}{2016!};$$

c) Chứng minh với mọi số tự nhiên $n\ge 1$ ta có $H<\dfrac{5}{4}$

với $H=\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{7^2}+...+\dfrac{1}{\left(2n-1\right)^2}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Đặt $B=\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+\dfrac{1}{5.7}+...+\dfrac{1}{2015.2017}$

thì $2B=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+...+\dfrac{1}{2015}-\dfrac{1}{2017}=1-\dfrac{1}{2017}<1\Rightarrow$ đpcm

b) Nhận xét với $k\in\mathbb{N}^*;\ k>1$ ta có:

$$\frac{k-1}{k!}=\frac{k-1}{\left(k-1\right)!k}=\frac{k}{\left(k-1\right)!k}-\frac{1}{\left(k-1\right)!k}=\frac{1}{\left(k-1\right)!}-\frac{1}{k!}$$

Do đó $G=\dfrac{1}{1!}-\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}+...+\dfrac{1}{2015!}-\dfrac{1}{2016!}=1-\dfrac{1}{2016!}<1$.

c) Ta làm trội bằng cách từ hạng thứ hai của H ta bớt mỗi mẫu số 1 đơn vị.

Ta có: $H < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{5^2-1} + ... + \frac{1}{(2n-1)^2-1}$

$= 1 + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{4.6} + ... + \frac{1}{(2n-2).2n}$

$= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n}\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) < \frac{5}{4}$.

21.11. Chứng minh:

$$\frac{1}{2016} < \frac{1}{2015^2+1} + \frac{1}{2015^2+2} + \frac{1}{2015^2+3} + ... + \frac{1}{2015^2+2015} < \frac{1}{2015}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Nhận xét: $2015^2 + 2015 = 2015(2015+1) = 2015.2016$

Ta có: $\frac{1}{2015.2016} < \frac{1}{2015^2+1} < \frac{1}{2015^2}$;

$\frac{1}{2015.2016} < \frac{1}{2015^2+2} < \frac{1}{2015^2}$;

$\frac{1}{2015.2016} < \frac{1}{2015^2+3} < \frac{1}{2015^2}$;

… … …

$\frac{1}{2015.2016} = \frac{1}{2015^2+2015} < \frac{1}{2015^2}$.

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta có:

$\frac{2015}{2015.2016} < S < \frac{2015}{2015^2}$ hay $\frac{1}{2016} < S < \frac{1}{2015}$.

Với $S = \frac{1}{2015^2+1} + \frac{1}{2015^2+2} + \frac{1}{2015^2+3} + ... + \frac{1}{2015^2+2015}$.

21.12. Tìm các số nguyên x, y, z, t thỏa mãn bất đẳng thức:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 13 < xy + 3y + 2z + 6t.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Do $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$ nên ta có:

$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 13 - xy - 3y - 2z - 6t \le 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - xy + 0,25y^2) + (0,75y^2 - 3y + 3) + (z^2 - 2z + 1) + (t^2 - 6t + 9) \le 0$

$\Leftrightarrow (x - 0,5y)^2 + 3(0,5y - 1)^2 + (z-1)^2 + (t-3)^2 \le 0$

$\Rightarrow (x, y, z, t) = (1; 2; 1; 3)$.

21.13. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \ge 2$

$$S_n = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{37}{24}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học:

- Với $n = 2$ thì $S_2 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{19}{12} > \frac{37}{24}$ đúng.

- Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$ $\left(k \in \mathbb{N}, k \geq 2\right)$ tức là $S_k > \frac{37}{24}$.

Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, tức là $S_{k+1} > \frac{37}{24}$.

Thật vậy: $S_k = 1 + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + ... + \frac{1}{2k} > \frac{37}{24}$

$S_{k+1} = 1 + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+4} + ... + \frac{1}{2k+2}$

Do đó $S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2\left(k+1\right)\left(2k+1\right)} > 0$

Suy ra $S_{k+1} > S_k > \frac{37}{24}$. Vậy bất đẳng thức đúng $\forall n \geq 2$.

21.14. Chứng minh rằng nếu $\left|x\right| < 2;\ \left|y\right| < 2$ thì $\left|2\left(x+y\right)\right| < \left|4+xy\right|$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Do $\left|x\right| < 2;\ \left|y\right| < 2$ nên $x^2 < 4;\ y^2 < 4$

Nghĩa là $\left(4 - x^2\right) > 0$ và $\left(4 - y^2\right) > 0$.

Ta có: $\left(4 - x^2\right)\left(4 - y^2\right) > 0$.

Mà $\left(4 - x^2\right)\left(4 - y^2\right) = 16 + x^2y^2 - 4\left(x^2 + y^2\right)$

$= \left(16 + 8xy + x^2y^2\right) - 4\left(x^2 + 2xy + y^2\right) = \left(4 + xy\right)^2 - \left[2\left(x+y\right)\right]^2 > 0$.

Do đó: $\left(4+xy\right)^2 > \left[2\left(x+y\right)\right]^2$. Hay $\left|2\left(x+y\right)\right| < \left|4+xy\right|$.

21.15. Chứng minh rằng nếu a, b, c là ba số thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} abc > 0 & (1) \\ a+b+c > 0 & (2) \\ ab+bc+ca > 0 & (3) \end{cases}$$

thì a, b, c là ba số dương.

Hướng dẫn giải – đáp số

* Ta sử dụng phương pháp phản chứng:

Giả sử trái lại, trong ba số a,b,c có ít nhất một số không dương. Do vai trò của a,b,c như nhau nên không mất tổng quát ta coi $a \le 0$. Nhưng theo (1) a phải khác 0 vậy $a < 0$ và ta có $bc < 0$.

Theo (3) $ab+bc+ca = a(b+c)+bc > 0$ nên $a(b+c) > -bc > 0$

Mà $a < 0$ nên $b+c < 0$ suy ra $a+b+c < 0$ trái với (2)

Vậy a,b,c phải là ba số dương.

21.16. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \ge 2$ ta có:

$$\frac{n}{2} < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^n-1} < n.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Bài toán có thể giải bằng phương pháp quy nạp toán học (bạn đọc tự chứng minh). Cách khác là ta sử dụng tính chất bắc cầu, làm trội biểu thức hoặc từng nhóm của biểu thức: Đặt $A = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^n-1}$.

a) Chứng minh $A < n$

Ta có: $A = 1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{15}\right)+...+\left(\frac{1}{2^{n-1}}+...+\frac{1}{2^n-1}\right)$

Ta làm trội ở từng nhóm bằng cách thay các phân số trong nhóm bằng phân số lớn nhất của nhóm, ta có:

$$A < 1+\frac{1}{2}.2+\frac{1}{2^2}.4+\frac{1}{2^3}.8+...+\frac{1}{2^{n-1}}.2^{n-1} = 1+1+1+...+1 = n.$$

b) Chứng minh $A > n:2$. Ta có:

$$A = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2^3}\right)+\left(\frac{1}{9}+...+\frac{1}{2^4}\right)+...+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+...+\frac{1}{2^n}\right)-\frac{1}{2^n}$$

Thay mỗi phân số trong từng nhóm bằng phân số nhỏ nhất trong nhóm ta có:

$$A > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}.2+\frac{1}{2^3}.2^2+...+\frac{1}{2^n}.2^{n-1}-\frac{1}{2^n} = 1+\frac{n}{2}-\frac{1}{2^n} > \frac{n}{2}$$

Vậy $\frac{n}{2} < A < n$.

21.17. Với bốn số thực a,b,c,d hãy chứng minh:

$$(1+ab)^2+(1+cd)^2+(ac)^2+(bd)^2 \ge 1$$

(Đề thi Olympic Toán học Thành phố Lêningrat, năm 1985)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$(1+ab)^2+(1+cd)^2+(ac)^2+(bd)^2$$

$$= 1+2ab+a^2b^2+1+2cd+c^2d^2+2(ac).(bd)+(ac)^2-2abcd+(bd)^2$$

$$= 1+(1+ab+cd)^2+(ac-bd)^2 \ge 1.$$

21.18.

a) Cho $A = \frac{x^3}{1+y} + \frac{y^3}{1+x}$ trong đó x, y là các số dương thỏa $xy = 1$.

Chứng minh rằng $A \geq 1$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9 quận 9, TP Hồ Chí Minh, năm 2011 – 2012)

b) Cho ba số dương a, b, c chứng minh

$$(3a+b)(2c+a+b) \leq (2a+b+c)^2.$$

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9 quận 9, TP Hồ Chí Minh, năm 2012 – 2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Do $xy = 1$ nên

$$A = \frac{x^3}{1+y} + \frac{y^3}{1+x} = \frac{x^4 + y^4 + x^3 + y^3}{(1+x)(1+y)} = \frac{\left(x^2+y^2\right)^2 - 2x^2y^2 + (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right)}{1 + xy + x + y}$$

$= \frac{\left(x^2+y^2\right)^2 - 2 + (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right)}{1+1+x+y}$. Ta có $x^2 + y^2 \geq 2xy = 2$

Do đó $A \geq \frac{4 - 2 + (x+y)(2-1)}{2+x+y} = \frac{2+x+y}{2+x+y} = 1$ (đpcm).

b) Áp dụng bất đẳng thức $4xy \leq (x+y)^2$ ta có:

$$4(3a+b)(2c+a+b) \leq (3a+b+2c+a+b)^2 = 4(2a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow (3a+b)(2c+a+b) \leq (2a+b+c)^2 \text{ (đpcm)}$$

21.19. Cho x, y là hai số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right) \geq (x+y)(1+xy).$$

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh, năm 2012 – 2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng bất đẳng thức $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ ta có

$$(x+y)(1+xy) \leq \frac{(x+y)^2 + (1+xy)^2}{2} = \frac{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right) + 2x.2y}{2}$$

$$\leq \frac{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right) + \left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}{2} = \left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right) \Rightarrow \text{ đpcm.}$$

21.20. Chứng minh $a^5 + b^5 \geq a^3b^2 + a^2b^3$ biết rằng $a + b \geq 0$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên tỉnh Đồng Nai, năm 2012 – 2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

Xét hiệu $a^5 + b^5 - a^3b^2 - a^2b^3 = a^3\left(a^2 - b^2\right) - b^3\left(a^2 - b^2\right)$

$= \left(a^2-b^2\right)\left(a^3-b^3\right) = \left(a-b\right)^2\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right) \ge 0$

do $a+b \ge 0$; $\left(a-b\right)^2 \ge 0$ và $a^2-ab+b^2 = \left(a-\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \ge 0$.

21.21. Cho ba số dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3} + \frac{1}{b^2+2c^2+3} + \frac{1}{c^2+2a^2+3} \le \frac{1}{2}.$$

(Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Bắc Giang, năm 2012 – 2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $a^2+2b^2+3 = \left(a^2+b^2\right) + \left(b^2+1\right) + 2 \ge 2ab+2b+2$.

Tương tự: $b^2+2c^2+3 \ge 2bc+2c+2$

$c^2+2a^2+3 \ge 2ca+2a+2$.

Do đó

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3} + \frac{1}{b^2+2c^2+3} + \frac{1}{c^2+2a^2+3} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{1}{ca+a+1}\right)$$

Với $abc=1$ thì

$$\frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{1}{ca+a+1} = \frac{1}{ab+b+1} + \frac{ab}{b+1+ab} + \frac{b}{1+ab+b} = 1 \Rightarrow \text{ đpcm.}$$

21.22. Cho các số dương x,y thỏa mãn $x-y = x^3+y^3$

Chứng minh rằng $x^2+y^2 < 1$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên tỉnh Bắc Ninh, năm 2013 – 2014)

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ giả thiết $\Rightarrow x-y>0 \Rightarrow x-y = x^3+y^3 > x^3-y^3 = \left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2\right)$.

Vậy $x-y > \left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2\right) \Rightarrow x^2+xy+y^2 < 1 \Rightarrow x^2+y^2 < 1$ (đpcm).

21.23. Cho ba số dương x,y,z. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{2x+y+z} + \frac{y}{x+2y+z} + \frac{z}{x+y+2z} \le \frac{3}{4}.$$

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh, năm 2013 – 2014)

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ $4ab \le \left(a+b\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{a+b} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ với $a>0; b>0$

Ta có $\frac{x}{2x+y+z} = \frac{x}{\left(x+y\right)+\left(x+z\right)} \le \frac{x}{4}\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z}\right)$

Tương tự với $\dfrac{y}{x+2y+z}$ và $\dfrac{z}{x+y+2z}$

$$\frac{x}{2x+y+z}+\frac{y}{x+2y+z}+\frac{z}{x+y+2z}\le\frac{x}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right)+\frac{y}{4}\left(\frac{1}{y+x}+\frac{1}{y+z}\right)+\frac{z}{4}\left(\frac{1}{z+y}+\frac{1}{z+x}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{x+y}{x+y}+\frac{x+z}{x+z}+\frac{y+z}{y+z}\right)=\frac{3}{4}\Rightarrow \text{(đpcm)}.$$

21.24.

a) Chứng minh rằng nếu $x\ge y\ge 1$ thì $x+\dfrac{1}{x}\ge y+\dfrac{1}{y}$;

b) Cho $1\le a,b,c\le 2$ chứng minh rằng $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\le 10$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng, năm 2013 – 2014)

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $x+\dfrac{1}{x}\ge y+\dfrac{1}{y}\Leftrightarrow x-y+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{(x-y)(xy-1)}{xy}\ge 0$ đúng vì $x\ge y\ge 1$.

b) Do vai trò a,b,c như nhau, giả sử $1\le a\le b\le c\le 2$;

Đặt $x=\dfrac{b}{a};\ y=\dfrac{c}{b}$ với $1\le x;y\le 2;\ xy\le 2\Rightarrow y\le\dfrac{2}{x}$.

Xét hiệu hai vế và áp dụng kết quả câu a) ta có:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-10=\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)+\left(xy+\frac{1}{xy}\right)-7$$

$$\le\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)+\left(2+\frac{1}{2}\right)-7=\frac{3x}{2}+\frac{3}{x}-\frac{9}{2}=\frac{3(x-1)(x-2)}{2x}\le 0$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=2$ đồng thời $xy=2$

$\Leftrightarrow (a,b,c)=(1;1;2);(1;2;2)$ và các hoán vị.

21.25. Cho hai số thực *a* và *b* thỏa mãn $a+b=2$. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2\le a^4+b^4.$$

(Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh, năm 2014 – 2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $(a+b)^2\le(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

Tương tự $(a^2+b^2)^2\le 2(a^4+b^4)\Rightarrow(a+b)^2(a^2+b^2)^2\le 4(a^2+b^2)(a^4+b^4)$

Mà $(a+b)^2=4\Rightarrow(a^2+b^2)^2\le(a^2+b^2)(a^4+b^4)\Rightarrow a^2+b^2\le a^4+b^4$.

21.26. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}\le\frac{3}{4}.$$

(Đề thi học sinh giỏi lớp 9 trường PTTH Trần Đại Nghĩa, TP Hồ Chí Minh, năm học 2014 – 2015).

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x+y}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ với $x>0;\ y>0$ và sử dụng giả thiết $abc=1$ ta có:

$\frac{1}{ab+a+2}=\frac{1}{(ab+1)+(a+1)}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{ab+1}+\frac{1}{a+1}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{abc}{ab+abc}+\frac{1}{a+1}\right)$ hay

$\frac{1}{ab+a+2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{c}{c+1}+\frac{1}{a+1}\right)$ $(*)$; Tương tự $\frac{1}{bc+b+2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{a}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right)$ $(**)$;

$\frac{1}{ca+c+2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{b}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)$ $(***)$. Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức cùng chiều (*), (**) và (***) ta có: $\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}\le\frac{3}{4}$.

Chương IV. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Chuyên đề 22. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A. Kiến thức cần nhớ

1. Bất phương trình ẩn *x*: có dạng $A(x) > B(x)$ (hoặc $A(x) < B(x)$; $A(x) \geq B(x)$; $A(x) \leq B(x)$), trong đó $A(x)$ và $B(x)$ là hai biểu thức chứa biến *x*.

2. Bất phương trình bậc nhất một ẩn: có dạng $ax + b > 0$ (hoặc $ax + b < 0$; $ax + b \geq 0$; $ax + b \leq 0$) trong đó *a* và *b* là hai số đã cho, $a \neq 0$.

3. Nghiệm của bất phương trình là giá trị của ẩn, khi thay vào bất phương trình được một khẳng định đúng. Tập hợp tất cả các nghiệm của một bất phương trình là tập nghiệm của nó. Giải một bất phương trình là tìm tập nghiệm của bất phương trình đó.

4. Hai bất phương trình tương đương: Có cùng tập nghiệm.

5. Quy tắc biến đổi bất phương trình:

a) Quy tắc chuyển vế: Khi chuyển vế một hạng tử của bất phương trình phải đổi dấu hạng tử đó.

b) Quy tắc nhân với một số: Khi nhân hai vế của bất phương trình với một số khác không ta phải: Giữ nguyên chiều bất phương trình nếu số đó dương, đổi chiều bất phương trình nếu số đó âm.

6. Bất phương trình dạng (hoặc đưa về dạng): $ax + b > 0 \left(a \neq 0\right)$ có nghiệm $x > -\frac{b}{a}$ nếu $a > 0$; $x < -\frac{b}{a}$ nếu $a < 0$

Các bất phương trình $ax + b < 0$; $ax + b \geq 0$; $ax + b \leq 0$ $\left(a \neq 0\right)$ giải tương tự.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào là bất phương trình bậc nhất một ẩn. Kiểm tra xem giá trị $x = 4$ là nghiệm của bất phương trình nào trong các bất phương trình bậc nhất một ẩn.

a) $2x + 3y > 6y + 7$; b) $-5x + 4 < 2 - 3x$;

c) $-5y + 8y + 4 < 3 - 2,5y$ (ẩn *y*);

d) $8x - 3 \geq 1 - 6x + 15x$; e) $x^2 - 6x + 5 \leq 0$.

* *Tìm cách giải*: - Dựa vào định nghĩa, bất phương trình nào đưa được về dạng $ax + b > 0$ (hoặc $ax + b < 0$; $ax + b \geq 0$; $ax + b \leq 0$) trong đó *a* và *b* là hai số đã cho, $a \neq 0$. Có thể chỉ cần căn cứ bậc cao nhất của ẩn trong bất phương trình là bậc 1.

- Nghiệm của bất phương trình là giá trị của ẩn, khi thay vào bất phương trình được một khẳng định đúng. Do đó xét bất phương trình $f(x) > g(x)$ (1). Thay $x = x_0$ vào (1). Nếu $f(x_0) > g(x_0)$ thì $x = x_0$ là nghiệm của (1).

Nếu $f(x_0) \leq g(x_0)$ thì $x = x_0$ không là nghiệm của (1).

(xét tương tự với các bất phương trình khác).

Giải

Các bất phương trình

b) $-5x+4<2-3x$ (ẩn x);

c) $-5y+8y+4<3-2,5y$ (ẩn y);

d) $8x-3\ge 1-6x+15x$ (ẩn x);

là các bất phương trình bậc nhất một ẩn.

Do $x=4$ nên chỉ xét các bất phương trình ẩn x

Đặt $f\left(x\right)=-5x+4;\ g\left(x\right)=2-3x$

$h\left(x\right)=8x-3;\ p\left(x\right)=1-6x+15x$.

Ta có: * $f\left(4\right)=-5.4+4=-16;\ g\left(4\right)=2-3.4=-10$.

$f\left(4\right)<g\left(4\right)$ nên $x=4$ là nghiệm của bất phương trình $-5x+4<2-3x$.

* $h\left(4\right)=8.4-3=29;\ p\left(4\right)=1-6.4+15.4=37$.

$h\left(4\right)<p\left(4\right)$ nên $x=4$ không là nghiệm của bất phương trình $8x-3\ge 1-6x+15x$.

Ví dụ 2: Giải các bất phương trình bậc nhất một ẩn ở ví dụ 1 trên và biểu diễn nghiệm trên trục số.

* *Tìm cách giải*: Ta dùng các quy tắc biến đổi bất phương trình để giải.

Giải

* Giải bất phương trình: $-5x+4<2-3x$

$\Leftrightarrow -5x+3x<2-4\Leftrightarrow -2x<-2$

$\Leftrightarrow x>-2:\left(-2\right)\Leftrightarrow x>1$.

* Giải bất phương trình: $8y-5y+4<3+2,5y$

$\Leftrightarrow 8y-5y-2,5y<3-4\Leftrightarrow 0,5y<-1$

$\Leftrightarrow y<\left(-1\right):0,5\Leftrightarrow y<-2$.

* Giải bất phương trình: $8x-3\ge 1-6x+15x$

$\Leftrightarrow 8x+6x-15x\ge 1+3\Leftrightarrow -x\ge 4$

$\Leftrightarrow x\le 4:\left(-1\right)\Leftrightarrow x\le -4$.

Ví dụ 3: Giải các bất phương trình:

a) $5x-7>3(x-2)+2x$;

b) $4(1,5x+2,5)<(x+3)^2+(5-x)(x+5)$;

c) $\dfrac{x-4}{5}-x+2\le\dfrac{x+3}{4}-\dfrac{x-2}{3}$;

d) $4x(x-1,25)+\dfrac{3(1-3x)}{2}\ge(2x-3)^2$.

* *Tìm cách giải*: Sử dụng các quy tắc biến đổi bất phương trình đưa các bất phương trình về dạng $ax+b>0$.

Giải

a) $5x-7>3(x-2)+2x \Leftrightarrow 5x-7>3x-6+2x$

$\Leftrightarrow 5x-3x-2x>-6+7 \Leftrightarrow 0x>1$.

Bất phương trình vô nghiệm.

b) $4(1,5x+2,5)<(x+3)^2+(5-x)(x+5)$

$\Leftrightarrow 6x+10<x^2+6x+9+25-x^2 \Leftrightarrow 6x-6x<25+9-10$

$\Leftrightarrow 0x<24$ nghiệm đúng $\forall x$.

Nghiệm của bất phương trình là $x\in\mathbb{R}$.

c) $\dfrac{x-4}{5}-x+2\le\dfrac{x+3}{4}-\dfrac{x-2}{3}$

$\Leftrightarrow 12(x-4)-60x+120\le 15(x+3)-20(x-2)$

$\Leftrightarrow 12x-48-60x+120\le 15x+45-20x+40$

$\Leftrightarrow 12x-60x+20x-15x\le 45-120+40+48$

$\Leftrightarrow -43x\le 13 \Leftrightarrow x\ge -\dfrac{13}{43}$.

d) $4x(x-1,25)+\dfrac{3(1-3x)}{2}\ge(2x-3)^2$

$\Leftrightarrow 8x(x-1,25)+3(1-3x)\ge 2(4x^2-12x+9)$

$\Leftrightarrow 8x^2-10+3-9x\ge 8x^2-24x+18$

$\Leftrightarrow 24x-9x\ge 18+10-3 \Leftrightarrow 15x\ge 25 \Leftrightarrow x\ge\dfrac{5}{3}$.

Ví dụ 4: Tìm *x* sao cho: $2(3x-4)<8x-10<7x-2$.

* *Tìm cách giải*: Giải bất phương trình kép này thực chất là giải đồng thời hai bất phương trình $2(3x-4)<8x-10$ và $8x-10<7x-2$.

Giá trị của *x* thỏa mãn đồng thời cả hai bất phương trình là nghiệm.

Giải

$2\left(3x-4\right)<8x-10<7x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-8<8x-10 \\ 8x-10<7x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-8x<8-10 \\ 8x-7x<10-2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x<-2 \\ x<8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2:\left(-2\right) \\ x<8 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<8$.

Ví dụ 5: Cho hai bất phương trình:

$\frac{x-3}{5}+\frac{11+x}{4}>\frac{3x-5}{2}$ $\left(1\right)$ và $5+\frac{x-4}{5}<x-\frac{2x-9}{2}+\frac{3x+2}{3}$ $\left(2\right)$

a) Tìm giá trị của x thỏa mãn hai bất phương trình.

b) Tìm giá trị nguyên của x thỏa mãn hai bất phương trình.

* *Tìm cách giải*: Yêu cầu của bài toán là tìm nghiệm và nghiệm nguyên chung của hai bất phương trình. Ta phải giải hai bất phương trình rồi tìm các giá trị nguyên của nghiệm trong khoảng nghiệm chung của hai bất phương trình.

Giải

Giải bất phương trình (1): $\frac{x-3}{5}+\frac{11+x}{4}>\frac{3x-5}{2}$

$\Leftrightarrow 4\left(x-3\right)+5\left(11+x\right)>10\left(3x-5\right)$

$\Leftrightarrow 4x-12+55+5x>30x-50 \Leftrightarrow 9x-30x>-50-55+12$

$\Leftrightarrow -21x>-93 \Leftrightarrow x<\frac{93}{21}$

Giải bất phương trình (2): $5+\frac{x-4}{5}<x-\frac{2x-9}{2}+\frac{3x+2}{3}$

$\Leftrightarrow 150+6\left(x-4\right)<30x-15\left(2x-9\right)+10\left(3x+2\right)$

$\Leftrightarrow 150+6x-24<30x-30x+135+30x+20$

$\Leftrightarrow 6x-30x<-150+24+135+20$

$\Leftrightarrow -24x<29 \Leftrightarrow x>-\frac{29}{24}$.

a) Giá trị của x thỏa mãn hai bất phương trình là $-\frac{29}{24}<x<\frac{93}{21}$

b) Giá trị nguyên của x thỏa mãn hai bất phương trình là:

$x \in \left\{-1;0;1;2;3;4\right\}$.

Ví dụ 6: Cho $A=\frac{x^2+6x+9}{x^3+27}:\frac{-x^3+3x^2+9x-27}{x^2-6x+9}$

Rút gọn biểu thức A rồi tìm giá trị của x để $A<0$.

* *Tìm cách giải*: Bài toán yêu cầu từ kết quả rút gọn A giải bất phương trình $A<0$. Lưu ý ĐKXĐ của A và các hằng đẳng thức.

Giải

ĐKXĐ: $x \neq \pm 3$

$$A = \frac{(x+3)^2}{(x+3)(x^2-3x+9)} \cdot \frac{(x-3)^2}{(x^2-9)(3-x)} = \frac{-1}{x^2-3x+9}$$

Do $x^2-3x+9 = \left(x^2 - 2.x.\frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) + \frac{27}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} > 0, \forall x$.

Do đó $A < 0$ với $x \neq \pm 3$.

Ví dụ 7: Giải bất phương trình sau với *a*, *b* là các hằng số dương.

$$a - a^2 x > b - b^2 x$$

* *Tìm cách giải*: Bất phương trình bậc nhất có hệ số bằng chữ. Khi giải lưu ý biện luận cho hệ số của ẩn.

Giải

a) $\Leftrightarrow a - a^2 x > b - b^2 x \Leftrightarrow (b^2 - a^2)x > b - a$

$\Leftrightarrow (b-a)(b+a)x > b - a$ (1)

Nếu $b > a$ thì $b - a > 0$. Nghiệm của bất phương trình là $x > \frac{1}{b+a}$;

Nếu $b < a$ thì $b - a < 0$. Nghiệm của bất phương trình là $a < \frac{1}{b+a}$;

Nếu $b = a$ thì (1) trở thành $0x > 0$ bất phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 8: Tìm giá trị của *m* để phương trình sau có nghiệm dương

$$\frac{2(x-m)}{2-m} - \frac{x-2}{2+m} = \frac{x+2}{2-m} - \frac{x+m}{2+m} \quad (m \neq \pm 2) \qquad (1)$$

* *Tìm cách giải*: Ta giải phương trình có hệ số bằng chữ lại nằm ở mẫu, do đó đặc biệt lưu ý ĐKXĐ và sau khi tìm nghiệm lập luận để có nghiệm dương.

Giải

(1) biến đổi thành $2(x-m)(2+m) - (2-m)(x-2) = (x+2)(2+m) - (x+m)(2-m)$

$\Leftrightarrow 4x + 2mx - 4m - 2m^2 - 2x + mx + 4 - 2m = 2x + mx + 4 + 2m - 2x + mx - 2m + m^2$

$\Leftrightarrow 2x + mx = 3m^2 + 6m \Leftrightarrow x(m+2) = 3m(m+2)$

Với $m \neq -2$ thì $m + 2 \neq 0$ ta có $x = 3m$

Để $x > 0$ thì $3m > 0$ hay $m > 0$.

Vậy với $m > 0$ và $m \neq -2$ thì phương trình có nghiệm dương.

Ví dụ 9: Giải các bất phương trình:

a) $\frac{2x-1016}{1000} + \frac{2x-1000}{1016} < \frac{2x-16}{2000} + \frac{2x-1}{2015}$ (1)

b) $\dfrac{5x-100}{900}+\dfrac{5x-200}{800}\le\dfrac{5x-500}{250}$ $\qquad (2)$

* *Tìm cách giải*: a) Thêm (-1) vào mỗi hạng tử ở hai vế rồi quy đồng mẫu từng cặp ta thấy xuất hiện nhân tử chung $2x-2016$. b) Thêm (-1) vào mỗi hạng tử ở vế trái, thêm (-2) vào vế phải rồi quy đồng mẫu từng cặp ta thấy xuất hiện nhân tử chung $5x-1000$. Ta có cách giải sau:

Giải

a) $(1)\Leftrightarrow\dfrac{2x-1016}{1000}-1+\dfrac{2x-1000}{1016}-1<\dfrac{2x-16}{2000}-1+\dfrac{2x-1}{2015}-1$

$\Leftrightarrow\dfrac{2x-2016}{1000}+\dfrac{2x-2016}{1016}<\dfrac{2x-2016}{2000}+\dfrac{2x-2016}{2015}$

$\Leftrightarrow(2x-2016)\left(\dfrac{1}{1000}+\dfrac{1}{1016}-\dfrac{1}{2000}-\dfrac{1}{2015}\right)<0$

Do $\dfrac{1}{1000}+\dfrac{1}{1016}-\dfrac{1}{2000}-\dfrac{1}{2015}>0$ nên $2x-2016<0\Leftrightarrow 2x<2016$

$\Leftrightarrow x<1008$.

b) $(2)\Leftrightarrow\dfrac{5x-100}{900}-1+\dfrac{5x-200}{800}-1\le\dfrac{5x-600}{200}-2$

$\Leftrightarrow\dfrac{5x-1000}{900}+\dfrac{5x-1000}{800}-\dfrac{5x-1000}{200}\le 0\Leftrightarrow(5x-1000)\left(\dfrac{1}{900}+\dfrac{1}{800}-\dfrac{1}{200}\right)\le 0$

Do $\dfrac{1}{900}+\dfrac{1}{800}-\dfrac{1}{200}=-\dfrac{19}{7200}<0$

Nên $5x-1000\ge 0\Leftrightarrow x\ge 200$.

C. Bài tập vận dụng

22.1. Tìm các giá trị nguyên của *x* để biểu thức $A=\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-2}{3}$ có giá trị lớn hơn 4 nhưng nhỏ hơn 5.

Hướng dẫn giải – đáp số

Cách 1: Ta giải bất phương trình kép

$$4<\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-2}{3}<5\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-2}{3}>4\\ \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-2}{3}<5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>23\\ x<29\end{cases}$$

Các giá trị nguyên của *x* thỏa mãn $23<x<29$ là $x\in\{24;25;26;27;28\}$

Cách 2: $4<\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-2}{3}<5\Leftrightarrow 24<3(x-1)-2(x-2)<30$

$\Leftrightarrow 24<x+1<30\Leftrightarrow 23<x<29$ và cũng có kết quả trên.

22.2. Giải các bất phương trình:

a) $3x-2>5(x-2)+2(3-x)$;

b) $5(x+2)^2<(2x+3)(2x-3)+(x-5)^2+30x$;

c) $4(2,5x^2+1)\ge 9(x+3)(x-3)+(2-x)^2+1$;

d) $x^3\le 2x+56$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Sử dụng các quy tắc biến đổi bất phương trình đưa các bất phương trình về dạng $ax+b>0$.

a) $3x-2>5(x-2)+2(3-x)\Leftrightarrow 0x>-2$ nghiệm đúng $\forall x$.

Nghiệm của bất phương trình là $x\in\mathbb{R}$.

b) $5(x+2)^2<(2x+3)(2x-3)+(x-5)^2+30x\Leftrightarrow 0x<-4$

Bất phương trình vô nghiệm.

c) $4(2,5x^2+1)\ge 9(x+3)(x-3)+(2-x)^2+1\Leftrightarrow 4x\ge -80$

$\Leftrightarrow x\ge -20$

d) Thêm vào hai vế -64 làm xuất hiện dạng x^3-4^3 ở vế trái và $2(x-4)$ ở vế phải.

Ta có $x^3\le 2x+56\Leftrightarrow x^3-64\le 2x+56-64$

$\Leftrightarrow (x-4)(x^2+4x+16)-2(x-4)\le 0\Leftrightarrow (x-4)(x^2+4x+14)\le 0$

Do $x^2+4x+14=(x+2)^2+10>0,\ \forall x$ nên ta có $x-4\le 0$ hay $x\le 4$.

22.3. Giải bất phương trình:

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}>\frac{x+3}{4}+\frac{x+4}{5}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}>\frac{x+3}{4}+\frac{x+4}{5}$

$\Leftrightarrow 30(x+1)+20(x+2)>15(x+3)+12(x+4)$

$\Leftrightarrow 23x>23\Leftrightarrow x>1$.

* *Chú ý*: d) Nhận xét: Nếu thêm (-1) vào mỗi hạng tử ở hai vế rồi quy đồng từng cặp ta thấy xuất hiện nhân tử chung là $(x-1)$. Do đó còn cách sau:

$\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}>\frac{x+3}{4}+\frac{x+4}{5}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{2}-1\right)+\left(\frac{x+2}{3}-1\right)>\left(\frac{x+3}{4}-1\right)+\left(\frac{x+4}{5}-1\right)$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)>0 \Leftrightarrow x>1$ do $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)>0$.

22.4. Tìm giá trị của *x* thỏa mãn bất phương trình:

a) $\frac{x+2}{3}-5>\frac{2(x-1)}{4}-x \quad (1)$ và $\frac{x^2}{3}-\frac{2x-3}{6}<\frac{(2x-1)^2}{12}+x \quad (2)$.

b) $\frac{2x-1}{5}-\frac{x}{2}\le\frac{2(x+1)}{3}-\frac{1}{10} \quad (3)$ và $2x(x-5)+x(x-2)>3(x+4)(x-4)-12 \quad (4)$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Giải bất phương trình (1) ta có $x>4,6$. Giải bất phương trình (2) ta có $x>\frac{5}{12}$. Giá trị $x>4,6$ thỏa mãn cả hai bất phương trình.

b) Giải bất phương trình (3) ta có $x\ge -1$. Giải bất phương trình (4) ta có $x<5$. Giá trị $-1\le x<5$ thỏa mãn cả hai bất phương trình.

22.5. Tìm số nguyên *x* thỏa mãn cả hai bất phương trình:

a) $3(2x-5)>2(6-7x) \quad (1)$ và $\frac{2(x-1)}{3}\le\frac{x+1}{5}+\frac{1}{15} \quad (2)$

b) $\frac{x-1}{3}-1\le\frac{2x-3}{4} \quad (3)$ và $4(x-1)(x^2+x+1)\ge(4x^2+3)x-16 \quad (4)$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Giải bất phương trình (1) ta có $x>\frac{27}{20}$. Giải bất phương trình (2) ta có $x\le 2$. Giá trị $x=2$ thỏa mãn cả hai bất phương trình.

b) Giải bất phương trình (3) ta có $x\ge -3,5$. Giải bất phương trình (4) ta có $x\le 4$. Vậy $x\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

22.6. Tìm giá trị nguyên của *x* để $3(x-1)-4<\frac{3x-11}{5}<\frac{2+5x}{4}-2$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Giải từng bất phương trình ta có:

$$3(x-1)-4<\frac{3x-11}{5}\Leftrightarrow 15x-15-20<3x-11\Leftrightarrow 12x<24\Leftrightarrow x<2$$

$$\frac{3x-11}{5}<\frac{2+5x}{4}-2\Leftrightarrow 12x-44<10+25x-40\Leftrightarrow -13x<14\Leftrightarrow x>-\frac{14}{13}$$

Do đó $-\frac{14}{13}<x<2$. Các giá trị nguyên của *x* thỏa mãn là $x\in\{-1;0;1\}$.

22.7. Cho biểu thức $A=\left(\frac{2x}{5}+\frac{5}{2x-5}\right):\left(\frac{4x^2}{125-20x^2}+\frac{1}{2x+5}\right)$

a) Rút gọn biểu thức A;

b) Tìm x để $A \le -2$;

c) Tìm x để $A > ax$ với a là một hằng số.

Hướng dẫn giải – đáp số

Sau khi rút gọn biểu thức A ta giải bất phương trình $A \le -2$ và phương trình chứa tham số $A > ax$. Ta đặc biệt lưu ý ĐKXĐ của A và biện luận khi giải bất phương trình chứa tham số.

a) ĐKXĐ: $x \ne \pm 2,5$

$$A = \frac{4x^2 - 10x + 25}{5(2x-5)} \cdot \frac{5(2x+5)(5-2x)}{4x^2 - 10x + 25} = -(2x+5)$$

b) Để $A \le -2$ ta có: $-(2x+5) \le -2 \Leftrightarrow 2x + 5 \ge 2 \Leftrightarrow 2x \ge -3$

$\Leftrightarrow x \ge -1,5$.

c) $A > ax$ tức là $-2x - 5 > ax \Leftrightarrow ax + 2x < -5 \Leftrightarrow (a+2)x < -5$

Nếu $a > -2$ thì $x < \frac{-5}{a+2}$; Nếu $a < -2$ thì $x > \frac{-5}{a+2}$;

Nếu $a = -2$ ta có $0x < -5$ vô lý.

22.8. Tìm giá trị của a để nghiệm của phương trình $\frac{a^2 - 4}{2x - 5} = 2 + a$ là số dương nhưng nhỏ hơn 2.

Hướng dẫn giải – đáp số

ĐKXĐ: $x \ne 2,5$ ta có $\frac{a^2 - 4}{2x - 5} = 2 + a$

$\Leftrightarrow (a-2)(a+2) - (2+a)(2x-5) = 0 \Leftrightarrow (a+2)(a - 2x + 3) = 0$

Nếu $a \ne -2$ thì $a - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a+3}{2}$

$x > 0$ thì $a + 3 > 0 \Leftrightarrow a > -3$

$x < 2$ thì $\frac{a+3}{2} < 2 \Leftrightarrow a + 3 < 4 \Leftrightarrow a < 1$.

Vậy để nghiệm của bất phương trình sau là số dương nhưng nhỏ hơn 2: $-3 < a < 1$ và $a \ne -2$.

(Nếu $a = -2$ thì ta có $0x = 0$ phương trình có vô số nghiệm do đó có vô số nghiệm dương trừ $x = 2,5$).

22.9. Giải các bất phương trình với a, b là các hằng số $(a \ne 0)$.

a) $a(x-a) > 5(x-5)$;

b) $\frac{ax-b}{a} + (a+b+1)x > \frac{2b}{a}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $a(x-a) > 5(x-5) \Leftrightarrow ax - a^2 > 5x - 25$

$\Leftrightarrow (a-5)x > (a-5)(a+5)$

Nếu $a > 5$ thì nghiệm của bất phương trình là $x > a + 5$

Nếu $a < 5$ thì nghiệm của bất phương trình là $x < a + 5$

Nếu $a = 5$ thì bất phương trình trở thành $0x > 0$, vô nghiệm.

b) Biến đổi bất phương trình ta có:

$$x + (a + b + 1)x > \frac{b}{a} + \frac{2b}{a} \Leftrightarrow (a + b + 2)x > \frac{3b}{a}$$

* Nếu $a + b + 2 > 0$ thì $x > \dfrac{3b}{a(a + b + 2)}$

* Nếu $a + b + 2 < 0$ thì $x < \dfrac{3b}{a(a + b + 2)}$

* Nếu $a + b + 2 = 0$ thì $0x > \dfrac{3b}{a}$ khi ấy:

Nếu $ab \geq 0$: Vô nghiệm. Nếu $ab < 0$: Vô số nghiệm.

22.10. Giải bất phương trình:

$$\frac{5x + 1015}{1000} + \frac{5x + 1000}{1015} + \frac{5x + 1}{2014} > \frac{5x - 1}{2016} + \frac{5x - 2}{2017} + \frac{5x - 10}{2025}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Thêm 1 vào mỗi hạng tử ở hai vế rồi quy đồng mẫu từng cặp ta thấy xuất hiện nhân tử chung $2x + 2015$. Ta có cách giải:

$$\frac{5x + 1015}{1000} + \frac{5x + 1000}{1015} + \frac{5x + 1}{2014} > \frac{5x - 1}{2016} + \frac{5x - 2}{2017} + \frac{5x - 10}{2025}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x + 1015}{1000} + 1 + \frac{5x + 1000}{1015} + 1 + \frac{5x + 1}{2014} + 1 > \frac{5x - 1}{2016} + 1 + \frac{5x - 2}{2017} + 1 + \frac{5x - 10}{2025} + 1$$

$$\Leftrightarrow (5x + 2015)\left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{1015} + \frac{1}{2014} - \frac{1}{2016} - \frac{1}{2017} - \frac{1}{2025}\right) > 0$$

Do $\dfrac{1}{1000} + \dfrac{1}{1015} + \dfrac{1}{2014} - \dfrac{1}{2016} - \dfrac{1}{2017} - \dfrac{1}{2025} > 0$

Nên $5x + 2015 > 0 \Leftrightarrow 5x > -2015 \Leftrightarrow x > -403$.

22.11. Cho $A = \dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + \dfrac{1}{5.7} + ... + \dfrac{1}{9.11}$

$$B = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right)\left(1 + \frac{1}{2.4}\right)...\left(1 + \frac{1}{8.10}\right)\left(1 + \frac{1}{9.11}\right)$$

Tìm số nguyên x thỏa mãn $2A < \dfrac{2x}{11} < B$.

Hướng dẫn giải – đáp số

$$2A = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + ... + \frac{2}{9.11} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$$

$B=\left(1+\frac{1}{1.3}\right)\left(1+\frac{1}{2.4}\right)...\left(1+\frac{1}{8.10}\right)\left(1+\frac{1}{9.11}\right)=\frac{2^2}{1.3}.\frac{3^2}{2.4}.....\frac{9^2}{8.10}.\frac{10^2}{9.11}=\frac{20}{11}$

$2A<\frac{2x}{11}<B$ tức là $\frac{10}{11}<\frac{2x}{11}<\frac{20}{11}\Leftrightarrow 10<2x<20\Leftrightarrow 5<x<10$

Do đó $x\in\{6;7;8;9\}$.

22.12. Một đội bóng đá tham gia một giải đấu. Đội đấu 20 trận và được 41 điểm. Theo quy định của giải, mỗi trận thắng được 3 điểm, mỗi trận hòa được 1 điểm, mỗi trận thua 0 điểm. Gọi số trận thắng của đội đó là *x*, số trận hòa là *y* và số trận thua là *z*, tìm x, y, z. Biết rằng số trận thắng của đội đó là một số chẵn.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta lập các phương trình biểu thị tổng số trận và tổng số điểm, xét xem *x* bị chặn bởi hai giá trị nào. Từ đó tìm ra các giá trị của *x* và *y*, *z*.

* Gọi số trận thắng của đội đó là *x*, số trận hòa là *y* và số trận thua là *z* $(x,y,z\in\mathbb{N})$. Ta có $x+y+z=20\ \ (1)$; đồng thời $3.x+1.y+0.z=41\ (2)$.

Từ (2) ta có $3x+y=41$ suy ra $3x\le 41\Leftrightarrow x\le\frac{41}{3}=13\frac{2}{3}$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2x-z=21\Rightarrow 2x\ge 21\Leftrightarrow x\ge\frac{21}{2}=10\frac{1}{2}$

Như vậy $10\frac{1}{2}\le x\le 13\frac{2}{3}$. Do $x\in\mathbb{N}\Rightarrow x=11;12;13$.

Do *x* là số chẵn nên $x=12$. Từ đó có $3.12+y=41\Rightarrow y=5$ và $z=3$.

22.13. Ký hiệu $[a]$ (phần nguyên của *a*) là số nguyên lớn nhất không vượt quá *a*.

Tìm $x\in\mathbb{Z}$ biết rằng $\left[\frac{8x-3}{5}\right]=2x+1$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Do $[a]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá *a* nên nếu $[a]=n$ thì *n* là số nguyên và $0\le a-n<1$.

Vì thế $\left[\frac{8x-3}{5}\right]=2x+1\Leftrightarrow\begin{cases}0\le\frac{8x-3}{5}-(2x+1)<1\\(2x+1)\in\mathbb{Z}\end{cases}$

Xét $0\le\frac{8x-3}{5}-(2x+1)<1\Leftrightarrow 0\le 8x-3-10x-5<5$

$\Leftrightarrow 0\le -2x-8<5\Leftrightarrow 8\le -2x<13\Leftrightarrow -8\ge 2x>-13$

$\Leftrightarrow -7\ge 2x+1>-12$

Do $2x+1\in\mathbb{Z}$ và $2x+1$ là số lẻ nên $2x+1=-7\Leftrightarrow x=-4$.

$2x+1=-9\Leftrightarrow x=-5;\ 2x+1=-11\Leftrightarrow x=-6$.

Vậy $x \in \{-4;-5;-6\}$

22.14. Giải bất phương trình $\dfrac{x+1}{2002} - 2 > \dfrac{x+4}{1999} + \dfrac{x+5}{1998} + \dfrac{x+7}{1996}$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 8 huyện Thường Tín – Hà Tây (cũ) năm học 2002 – 2003)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\frac{x+1}{2002} - 2 > \frac{x+4}{1999} + \frac{x+5}{1998} + \frac{x+7}{1996}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{2002} + 1 > \left(\frac{x+4}{1999} + 1\right) + \left(\frac{x+5}{1998} + 1\right) + \left(\frac{x+7}{1996} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2003}{2002} > \frac{x+2003}{1999} + \frac{x+2003}{1998} + \frac{x+2003}{1996}$$

$$\Leftrightarrow (x+2003)\left(\frac{1}{2002} - \frac{1}{1999} - \frac{1}{1998} - \frac{1}{1996}\right) > 0$$

Do $\dfrac{1}{2002} - \dfrac{1}{1999} - \dfrac{1}{1998} - \dfrac{1}{1996} < 0$ nên $x + 2003 < 0 \Leftrightarrow x < -2003$.

22.15. Giải bất phương trình $x + |x-1| > 5$.

(Thi vào lớp 10 Quốc học Huế, năm 2003 – 2004)

Hướng dẫn giải – đáp số

* Với $x \geq 1$ thì $|x-1| = x-1$. Bất phương trình trở thành $x + x - 1 > 5 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3$ (thỏa mãn).

* Với $x < 1$ thì $|x-1| = 1-x$. Bất phương trình trở thành $x + 1 - x > 5 \Leftrightarrow 0x > 4$ vô nghiệm.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 3$.

Chương IV. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Chuyên đề 23. BẤT PHƯƠNG TRÌNH DẠNG TÍCH, THƯƠNG

A. Kiến thức cần nhớ

1. Bất phương trình dạng tích: $A(x).B(x)>0$;

(hoặc $A(x).B(x)<0;\ A(x).B(x)\ge 0;\ A(x).B(x)\le 0$);

2. Bất phương trình dạng thương: $\dfrac{A(x)}{B(x)}>0$

(hoặc $\dfrac{A(x)}{B(x)}<0;\ \dfrac{A(x)}{B(x)}\ge 0;\ \dfrac{A(x)}{B(x)}\le 0$).

3. Định lý về dấu của nhị thức bậc nhất $ax+b\,(a\ne 0)$:

Nhị thức bậc nhất cùng dấu với *a* khi $x>-\dfrac{b}{a}$

Nhị thức bậc nhất trái dấu với *a* khi $x<-\dfrac{b}{a}$

Do $-\dfrac{b}{a}$ là nghiệm của nhị thức $ax+b$ nên định lý được phát biểu:

Nhị thức $ax+b\,(a\ne 0)$ cùng dấu với a với các giá trị của x lớn hơn nghiệm của nhị thức, trái dấu với a với các giá trị của x nhỏ hơn nghiệm của nhị thức.

4. Phương pháp giải các bất phương trình dạng tích, thương: Phân tích thành nhân tử chứa các nhị thức bậc nhất. Lập bảng xét dấu của nhị thức bậc nhất $ax+b$

x		$-\dfrac{b}{a}$	
$ax+b$	trái dấu với *a*	0	cùng dấu với *a*

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Giải bất phương trình $(2x-9)(1945+x)>0$.

* *Tìm cách giải*: Với tích $A.B>0$ xảy ra khi *A* và *B* cùng dấu. Do đó $A>0$ và $B>0$ hoặc $A<0$ và $B<0$. Ta có cách giải:

Giải

Cách 1: Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-9>0\\1945+x>0\end{cases}\\ \begin{cases}2x-9<0\\1945+x<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x>9\\x>-1945\end{cases}\\ \begin{cases}2x<9\\x<-1945\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>4,5\\x>-1945\end{cases}\\ \begin{cases}x<4,5\\x<-1945\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>4,5\\x<-1945\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 4,5$; $x < -1945$.

* *Chú ý:* Bằng việc lập bảng xét dấu của từng thừa số của tích là nhị thức bậc nhất ta có cách 2: Lập bảng xét dấu:

x		-1945		$4,5$	
$2x-9$	$-$	0	$-$	$\vert$	$+$
$1945+x$	$-$	$\vert$	$+$	0	$+$
$(2x-9)(1945+x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy nghiệm của bất phương trình: $x > 4,5$ hoặc $x < -1945$.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình $(x-6)(x+10) < -x^2 + x + 30$.

* *Tìm cách giải*: Ta phân tích vế phải thành nhân tử, xuất hiện nhân tử chung và chuyển vế để đưa về phương trình tích.

Giải

a) Ta có: $-x^2 + x + 30 = -x^2 + 6x - 5x + 30 = -(x-6)(x+5)$

Do đó bất phương trình thành $(x-6)(x+10) + (x-6)(x+5) < 0$

$\Leftrightarrow (x-6)(2x+15) < 0$. Lập bảng xét dấu:

x		$-7,5$		6	
$x-6$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$
$2x+15$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$
$(x-6)(2x+15)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Nghiệm của bất phương trình là: $-7,5 < x < 6$.

Ví dụ 3: Giải bất phương trình $x^4 + 36 \geq 13x^2$ sau đó biểu diễn nghiệm trên trục số.

* *Tìm cách giải*: Chuyển tất cả về một vế rồi phân tích vế đó thành nhân tử và giải bất phương trình tích.

Giải

Ta có $x^4 + 36 \geq 13x^2 \Leftrightarrow x^4 - 13x^2 + 36 \geq 0$

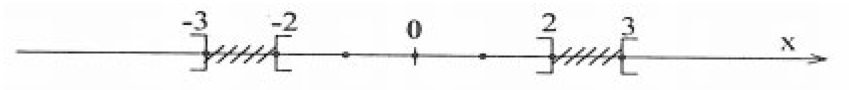
$\Leftrightarrow x^4 - 9x^2 - 4x^2 + 36 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2-9)(x^2-4) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x-3)(x+3) \geq 0$. Lập bảng xét dấu:

x		-3		-2		2		3	
$x-2$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$
$x+2$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$
$x-3$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$

Vế trái	+	0	–	0	+	0	–	0	+

Nghiệm của bất phương trình là: $\left[\begin{array}{l} x \le -3 \\ -2 \le x \le 2 \\ x \ge 3 \end{array}\right.$. Biểu diễn nghiệm:



Ví dụ 4: Giải bất phương trình: $\dfrac{2016-6x}{x(x+8)} \le 0$.

* *Tìm cách giải*: Đây là bất phương trình dạng thương của $(2016-6x)$ chia cho $x(x-8)$. Ta có $2016-6x=0 \Leftrightarrow x=336;\ x+8=0 \Leftrightarrow x=-8$.

Giải

ĐKXĐ: $x \ne 0$ và $x \ne -8$. Đặt $A=\dfrac{2016-6x}{x(x+8)}$. Lập bảng xét dấu:

x		-8		0		336	
$2016-6x$	+	|	+	|	+	0	–
x	–	|	–	0	+	|	+
$x+8$	–	0	+	|	+	|	+
A	+	||	–	||	+	0	–

$A \le 0$ khi $\left[\begin{array}{l} -8 < x < 0 \\ x \ge 336 \end{array}\right.$.

Ví dụ 5: Giải bất phương trình $\dfrac{-x^2-5x+28}{x^2+2x-15} \ge -2 \qquad (1)$

Và biểu diễn nghiệm trên trục số.

* *Tìm cách giải*: Nếu chuyển vế, rút gọn vế trái ta được bất phương trình dạng thương. Phân tích các tử, mẫu thành nhân tử rồi lập bảng xét dấu.

Giải

ĐKXĐ: $x \ne 3;\ x \ne -5$

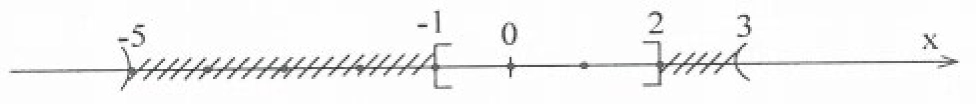
$$(1) \Leftrightarrow \frac{-x^2-5x+28}{x^2+2x-15}+2 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-2}{x^2+2x-15} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{(x-3)(x+5)} \ge 0$$

Lập bảng xét dấu ta có:

x		-5		-1		2		3	
$x+1$	–	|	–	0	+	|	+	|	+
$x-2$	–	|	–	|	–	0	+	|	+
$x-3$	–	|	–	|	–	|	–	0	+

$x+5$	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$
Vế trái	$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$

Nghiệm của bất phương trình là $\left[\begin{array}{l} x<-5 \\ -1\le x\le 2 \\ x>3 \end{array}\right.$. Biểu diễn nghiệm:



Ví dụ 6: Cho biểu thức $A=\left[\dfrac{5}{x+3}-\dfrac{5x-15}{2x-9}.\left(\dfrac{2x-9}{x^2-9}-2x+9\right)\right]:\dfrac{1-x}{1+x}$.

Tìm x để $A<0$

* *Tìm cách giải*: Khi rút gọn biểu thức và khi tìm x để $A<0$ cần lưu ý ĐKXĐ. Do sau khi chia $1-x$ cũng thành mẫu số nên $x\ne \pm 1$.

Giải

Rút gọn A: ĐKXĐ: $x\ne\pm 3$; $x\ne\pm 1$; $x\ne 4,5$. Ta có:

$$A=\left[\frac{5}{x+3}-\frac{5(x-3)}{(2x-9)}.\frac{(2x-9)(1-x^2+9)}{(x-3)(x+3)}\right].\frac{1+x}{1-x}$$

$$=\left[\frac{5}{x+3}-\frac{5(1-x^2+9)}{x+3}\right].\frac{1+x}{1-x}=\frac{5(x-3)(x+3)}{x+3}.\frac{1+x}{1-x}=\frac{5(x-3)(1+x)}{1-x}$$

Lập bảng xét dấu:

x		-1		1		3	
$x-3$	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$
$1+x$	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$
$1-x$	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$
A	$+$	||	$-$	||	$+$	||	$-$

Vậy để $A<0$ thì $\left[\begin{array}{l} -1<x<1 \\ x>3; x\ne 4,5 \end{array}\right.$.

Ví dụ 7: Giải bất phương trình:

$$\frac{1}{x^2-x}+\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-5x+6}+...+\frac{1}{x^2-39x+380}<0.$$

* *Tìm cách giải*: Bất phương trình có ẩn ở mẫu nên lưu ý ĐKXĐ.

Ta có $x^2-x=x(x-1)$; $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$;... có dạng tổng quát $A.(A-1)$.

Mà $\dfrac{1}{A(A-1)}=\dfrac{A-(A-1)}{A(A-1)}=\dfrac{1}{A-1}-\dfrac{1}{A}$. Ta phân tích các phân thức ở vế trái rồi rút gọn, sẽ được một phân thức dạng thương.

Giải

ĐKXĐ: $x\notin\{0;1;2;3;....;19;20\}$.

Biến đổi bất đẳng thức thành:

$$\frac{1}{x(x-1)}+\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}+...+\frac{1}{(x-19)(x-20)}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}+...+\frac{1}{x-20}-\frac{1}{x-19}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-20}-\frac{1}{x}<0\Leftrightarrow \frac{20}{x(x-20)}<0.$$

Đặt $A=\dfrac{20}{x(x-20)}$. Lập bảng xét dấu

x		0		20	
x	$-$	0	$+$	|	$+$
$x-20$	$-$	|	$-$	0	$+$
A	$+$	||	$-$	||	$+$

$A<0$ khi $x\notin\{1;2;3;...;19\}$ và $0<x<20$.

Ví dụ 8: Giải bất phương trình $\dfrac{m-5}{x-2}>3$ với m là tham số.

* *Tìm cách giải*: Bất phương trình có ẩn ở mẫu là có tham số nên phải lưu ý ĐKXĐ và biện luận tham số m khi giải bất phương trình.

Giải

ĐKXĐ: $x\neq 2$

$$\frac{m-5}{x-2}>3\Leftrightarrow \frac{m-5}{x-2}-3>0\Leftrightarrow \frac{(m+1)-3x}{x-2}>0$$

Ta thấy $m+1-3x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{m+1}{3}$.

Ta có $\dfrac{m+1}{3}>2\Leftrightarrow m>5$ và $\dfrac{m+1}{3}<2\Leftrightarrow m<5$. Đặt $B=\dfrac{(m+1)-3x}{x-2}$.

Lập bảng xét dấu: khi $m>5$

x	2	$\dfrac{m+1}{3}$

$m+1-3x$	$+$	$\mid$	$+$	0	$-$
$x-2$	$-$	0	$+$	$\mid$	$+$
B	$-$	$\|$	$+$	0	$-$

Với $m>5$ ta có nghiệm của bất phương trình là: $2<x<\frac{m+1}{3}$.

Lập bảng xét dấu: khi $m<5$

x		$\frac{m+1}{3}$		2	
$m+1-3x$	$+$	0	$-$	$\mid$	$-$
$x-2$	$-$	$\mid$	$-$	0	$+$
B	$-$	0	$+$	$\|$	$-$

Với $m<5$ ta có nghiệm của bất phương trình là: $\frac{m+1}{3}<x<2$

Ví dụ 9: Tìm giá trị của *m* để nghiệm của phương trình sau lớn hơn 3:

$$\frac{m-3}{x-3}=3+m.$$

* *Tìm cách giải*: Bài toán giải phương trình với tham số, tìm nghiệm sau đó coi tham số *m* là ẩn để nghiệm lớn hơn 3 thực chất là giải bất phương trình ẩn *m*.

Giải

a) Với $x\neq 3$ ta có $m-3=(x-3)(3+m)\Leftrightarrow x(m+3)=4m+6$

* Với $m=-3$ phương trình trở thành $0x=-6$ vô nghiệm.

* Với $m\neq -3\Leftrightarrow x=\frac{4m+6}{m+3}$

Để $x>3$ ta phải có: $\frac{4m+6}{m+3}>3\Leftrightarrow \frac{4m+6}{m+3}-3>0\Leftrightarrow \frac{m-3}{m+3}>0$

Đặt $C=\frac{m-3}{m+3}$. Lập bảng xét dấu

m		-3		3	
$m+3$	$-$	0	$+$	$\mid$	$+$
$m-3$	$-$	$\mid$	$-$	0	$+$
C	$+$	$\|$	$-$	0	$+$

Để $x>3$ thì $m>3$ hoặc $m<-3$.

C. Bài tập vận dụng

23.1. Giải bất phương trình $x^2+3x-1\leq 2x+5$ và biểu diễn nghiệm trên trục số.

Hướng dẫn giải – đáp số

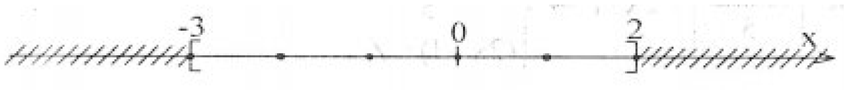
Biến đổi thành $x^2+x+6\le 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+3)\le 0$

Cách 1: Lý luận $x-2\le 0$ và $x+3\ge 0$ (do $x+3>x-2,\ \forall x$)

Cách 2: Lập bảng xét dấu.

Ta đều có kết quả $-3\le x\le 2$.

Biểu diễn nghiệm trên trục số:



23.2. Giải các bất phương trình sau:

a) $(19x+8)(2-9x)(3x-2)(30-4x)>0$;

b) $(10-x)(5x-2001)+3x^2-25x-50<100-x^2$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Lập bảng xét dấu. Nghiệm là $x<-\dfrac{8}{19}$; $\dfrac{2}{9}<x<\dfrac{2}{3}$ hoặc $x>\dfrac{30}{4}$.

b) Nhận xét: $3x^2-25x-50=(3x+5)(x-10)=-(10-x)(3x+5)$.

Mặt khác $100-x^2=(10-x)(10+x)$. Do đó ta biến đổi

BPT $\Leftrightarrow (10-x)(5x-2001)-(10-x)(3x+5)-(10-x)(10+x)<0$

$\Leftrightarrow (10-x)(x-2016)<0$

Giải bất phương trình được $\left[\begin{array}{l} x<10 \\ x>2016 \end{array}\right.$.

23.3. Giải các bất phương trình và biểu diễn nghiệm trên trục số.

a) $x^3-9x^2+26x-24<0$;

b) $x^4-7x^2+22x+36\ge 4(x^3+3)$.

Hướng dẫn giải – đáp số

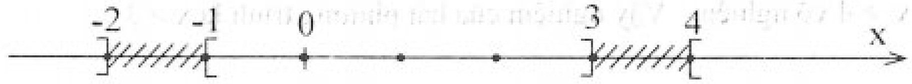
Đây là các bất phương trình bậc ba và bốn. Ta chuyển vế rồi sử dụng hệ quả định lý Bézout (nhẩm nghiệm) để phân tích vế trái thành nhân tử.

a) BPT $\Leftrightarrow (x-2)(x-3)(x-4)<0$

Lập bảng xét dấu tìm được nghiệm: $\left[\begin{array}{l} 3<x<4 \\ x<2 \end{array}\right.$

b) Chuyển vế và biến đổi BPT $\Leftrightarrow (x+1)(x+2)(x-3)(x-4)\ge 0$

Lập bảng xét dấu tìm được nghiệm: $\left[\begin{array}{l} x \le -2 \\ -1 \le x \le 3 \\ x \ge 4 \end{array}\right.$. Biểu diễn nghiệm:



23.4. Giải các bất phương trình sau và biểu diễn nghiệm trên trục số.

a) $(2x+1)(4x+3)(8x+5)^2 \le 9$;

b) $(2x-1)(2x-2)(4x-5)(4x-7) \ge 18$;

c) $(x^2-3x+2)(2x-3)(2x-5) > 30$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Nhân 4 vào nhân tử thứ nhất, nhân 2 vào nhân tử thứ hai và nhân 8 vào vế phải ta được:

BPT $\Leftrightarrow (8x+4)(8x+6)(8x+5)^2 \le 72$

Đặt $8x+5 = y$ ta có: $(y-1)(y+1)y^2 \le 72$

$\Leftrightarrow (y^2-1)y^2 - 72 \le 0 \Leftrightarrow y^4 - y^2 - 72 \le 0$

$\Leftrightarrow (y^2-9)(y^2+8) \le 0$

Do $y^2+8 = (8x+5)^2+8 > 0,\ \forall x$ nên $y^2 - 9 \le 0$

Hay $(y-3)(y+3) \le 0$. Thay $y = 8x+5$ vào ta có: $(8x+2)(8x+8) \le 0$

Giải được $-1 \le x \le -\dfrac{1}{4}$ (Bạn đọc tự biểu diễn nghiệm trên trục số)

b) Nhân 2 vào nhân tử thứ nhất, nhân 2 vào nhân tử thứ hai và nhân 4 vào vế phải ta được:

BPT $\Leftrightarrow (4x-2)(4x-4)(4x-5)(4x-7) \ge 72$

$\Leftrightarrow \left[(4x-2)(4x-7)\right]\left[(4x-4)(4x-5)\right] \ge 72$

$\Leftrightarrow (16x^2-36x+14)(16x^2-36x+20) \ge 72$

Đặt $16x^2-36x+17 = y$ ta có: $(y-3)(y+3) - 72 \ge 0$

$\Leftrightarrow y^2 - 81 \ge 0 \Leftrightarrow (y-9)(y+9) \ge 0$

Do $y+9 = 16x^2-36x+26 = (4x)^2 - 2.4x.\dfrac{9}{2} + \dfrac{81}{4} + \dfrac{23}{4}$

$= \left(4x - \dfrac{9}{2}\right)^2 + \dfrac{23}{4} > 0, \forall x$ từ đó ta có $y - 9 \ge 0$

Hay $16x^2 - 36x + 8 \ge 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 9x + 2 \ge 0 \Leftrightarrow (4x-1)(x-2) \ge 0$.

Giải bất phương trình này được $\left[\begin{array}{l} x \le \dfrac{1}{4} \\ x \ge 2 \end{array}\right.$. (Bạn đọc tự biểu diễn nghiệm).

c) BPT $\Leftrightarrow (x-1)(x-2)(2x-3)(2x-5) > 30$

$\Leftrightarrow (2x-2)(2x-4)(2x-3)(2x-5) > 120$

$\Leftrightarrow (4x^2-14x+10)(4x^2-14x+12)-120 > 0$

Đặt $4x^2-14x+11 = y$ ta có $(y-1)(y+1)-120 > 0$

$\Leftrightarrow y^2-11^2 > 0 \Leftrightarrow (y-11)(y+11) > 0$

Do $y+11 = 4x^2-14x+22 = (2x)^2 - 2.2x.\dfrac{7}{2}+\dfrac{49}{4}+\dfrac{39}{4}$

$$= \left(2x-\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{39}{4} > 0,\ \forall x$$

Do đó $y-11 > 0$ hay $4x^2-14x > 0 \Leftrightarrow 2x(2x-7) > 0$.

Giải bất phương trình được $\left[\begin{array}{l} x > 3,5 \\ x < 0 \end{array}\right.$. (Bạn đọc tự biểu diễn nghiệm).

23.5. Giải các bất phương trình:

a) $(x^2+2)(x^2-2)(x^4-8) \le 96$;

b) $x^4+4 \ge 26(x^2+2x+2)+3x^3+6x^2+6x$;

c) $x(x^3-27)(x+1) > 6(x^3-27)$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) BPT $\Leftrightarrow (x^4-4)(x^4-8) \le 96$

$\Leftrightarrow x^8-12x^4+32-96 \le 0 \Leftrightarrow x^8+4x^4-16x^4-64 \le 0$

$\Leftrightarrow (x^4-16)(x^4+4) \le 0$

Do $x^4+4 > 0,\ \forall x$ nên $x^4-16 \le 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2)(x^2+4) \le 0$

Do $x^2+4 > 0,\ \forall x$ nên $(x+2)(x-2) \le 0 \Leftrightarrow -2 \le x \le 2$.

* Chú ý: Câu a) có thể dùng phương pháp đặt biến phụ: Đặt $x^4-6 = y$ ta có

$(y+2)(y-2) \le 96 \Leftrightarrow y^2-4-96 \le 0$

$\Leftrightarrow y^2-100 \le 0 \Leftrightarrow (y-10)(y+10) \le 0$

Do $y+10 = x^4-6+10 = x^4+4 > 0,\ \forall x$ nên $y-10 \le 0$

hay $x^4-16 \le 0$ rồi giải như trên ta được $-2 \le x \le 2$.

b) Để ý rằng $x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=\left(x^2+2\right)^2-\left(2x\right)^2$

$$=\left(x^2+2x+2\right)\left(x^2-2x+2\right)$$

Do đó có $\left(x^4+4\right)-\left(x^2+2x+2\right)\left(3x+26\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2+2x+2\right)\left(x^2-2x+2\right)-\left(x^2+2x+2\right)\left(3x+26\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2+2x+2\right)\left(x^2-5x-24\right)\geq 0 \Leftrightarrow \left(x^2+2x+2\right)\left(x-8\right)\left(x+3\right)\geq 0$

Do $x^2+2x+2=\left(x+1\right)^2+1>0,\ \forall x$ nên ta chỉ xét

$\left(x-8\right)\left(x+3\right)\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq -3 \\ x\geq 8 \end{array}\right.$

c) BPT $\Leftrightarrow \left(x^3-27\right)\left(x^2+x-6\right)>0$

$\Leftrightarrow \left(x-3\right)\left(x^2+3x+9\right)\left(x-2\right)\left(x+3\right)>0$

Ta có $x^2+3x+9=\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{27}{4}>0,\ \forall x$. Vậy $\left(x-3\right)\left(x+3\right)\left(x-2\right)>0$

Giải bất phương trình ta có nghiệm: $\left[\begin{array}{l} -3<x<2 \\ x>3 \end{array}\right.$.

23.6. Giải bất phương trình $\dfrac{-2x+9}{1945+70x}>0$.

Hướng dẫn giải – đáp số

ĐKXĐ $x\neq -\dfrac{389}{14}$. Lập bảng xét dấu:

Nghiệm của bất phương trình là: $-\dfrac{389}{14}<x<\dfrac{9}{2}$.

23.7. Giải các bất phương trình:

a) $\dfrac{1+5x}{x-4}\geq 2$;

b) $\dfrac{3x}{x-2}\leq 1+\dfrac{2x-1}{x+2}$;

c) $\dfrac{1}{x-8}<\dfrac{2}{x-6}$;

d) $\dfrac{2x}{x-3}-\dfrac{1}{x-1}>1$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) ĐKXĐ $x\neq 4$

BPT $\Leftrightarrow \dfrac{1+5x}{x-4}-2\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{9+3x}{x-4}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \\ x\leq -3 \end{array}\right.$

b) ĐKXĐ $x\neq \pm 2$; BPT $\Leftrightarrow \dfrac{11x+2}{\left(x+2\right)\left(x-2\right)}\leq 0$.

Lập bảng xét dấu ta tìm được $\left[\begin{array}{l} x<-2 \\ -\dfrac{2}{11} \le x < 2 \end{array}\right.$.

c) ĐKXĐ $x \ne 8$ và $x \ne 6$

BPT $\Leftrightarrow \dfrac{-x+10}{(x-8)(x-6)} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6<x<8 \\ x>10 \end{array}\right.$.

d) ĐKXĐ $x \ne 3$ và $x \ne 1$. BPT $\Leftrightarrow \dfrac{(x+3)(x-2)}{(x-1)(x-3)} > 0$

Lập bảng xét dấu, nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x<-3 \\ 1<x<2 \\ x>3 \end{array}\right.$

23.8. Tìm *x* để $3 < \dfrac{x+3}{x-5} < 5$.

Hướng dẫn giải – đáp số

$$3 < \frac{x+3}{x-5} < 5 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x+3}{x-5} > 3 \\ \dfrac{x+3}{x-5} < 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5<x<9 \\ \left[\begin{array}{l} x>7 \\ x<5 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow 7<x<9.$$

23.9. Cho $A = \dfrac{(x-2016)\left(\dfrac{x-3}{x+1} + \dfrac{x+1}{x-3}\right)}{\left(\dfrac{x-3}{x+1} - \dfrac{x+1}{x-3}\right)}$

Rút gọn *A* sau đó tìm giá trị của *x* để $A \le 0$.

Hướng dẫn giải – đáp số

ĐKXĐ $x \ne 3$; $x \ne \pm 1$. Rút gọn:

$$A = \frac{(x-2016)(2x^2-4x+10)}{8-8x} = \frac{(x-2016)(x^2-2x+5)}{4(1-x)}$$

Do $x^2-2x+5 = (x-1)^2+4 > 0,\ \forall x$ nên $A \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-2016}{4(1-x)} \le 0$.

Giải được $\left[\begin{array}{l} x \ge 2016 \\ x<1 \end{array}\right.$ và $x \ne -1$.

23.10. Cho $B = \left(\dfrac{x}{x+3} - \dfrac{x^3-27}{x^3+27}.\dfrac{x^2-3x+9}{x^2-9}\right) : \dfrac{9}{x^2+x-6}$

Tìm *x* để $B \ge 2015$.

Hướng dẫn giải – đáp số

ĐKXĐ: $x \neq \pm 3;\ x \neq -2$. Rút gọn được $B = \dfrac{2-x}{x+3}$.

$$B \geq 2015 \Leftrightarrow \frac{2-x}{x+3} \geq 2015 \Leftrightarrow \frac{2-x}{x+3} - 2015 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-2016x - 6043}{x+3} \geq 0$$

Giải bất phương trình này được: $-3 < x \leq -\dfrac{6043}{2016}$.

23.11. Tìm giá trị của *m* để phương trình có nghiệm không âm

$$\frac{3}{x-2} = 5 - m.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Với $x \neq 2$ ta có: $3 = (5-m)(x-2) \Leftrightarrow x(m-5) = 2m - 13$

* Với $m = 5$ phương trình trở thành $0x = -3$ vô nghiệm.

* Với $m \neq 5$ thì $\Leftrightarrow x = \dfrac{2m-13}{m-5}$

Để $x \geq 0$ ta phải có $\dfrac{2m-13}{m-5} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 6,5 \\ m < 5 \end{array}\right.$

23.12. Giải bất phương trình sau:

$$\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{6}-1\right)\left(\frac{1}{10}-1\right)\left(\frac{1}{15}-1\right)\left(\frac{1}{21}-1\right)\left(\frac{1}{28}-1\right)x > \frac{x^2}{7} - 4.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $\left(\dfrac{1}{3}-1\right)\left(\dfrac{1}{6}-1\right)\left(\dfrac{1}{10}-1\right)\left(\dfrac{1}{15}-1\right)\left(\dfrac{1}{21}-1\right)\left(\dfrac{1}{28}-1\right)$

$$= \left(\frac{2}{2.3}-1\right)\left(\frac{2}{3.4}-1\right)\left(\frac{2}{4.5}-1\right)\left(\frac{2}{5.6}-1\right)\left(\frac{2}{6.7}-1\right)\left(\frac{2}{7.8}-1\right)$$

$$= \frac{-4}{2.3}.\frac{-10}{3.4}.\frac{-18}{4.5}.\frac{-28}{5.6}.\frac{-40}{6.7}.\frac{-54}{7.8} = \frac{1.4}{2.3}.\frac{2.5}{3.4}.\frac{3.6}{4.5}.\frac{4.7}{5.6}.\frac{5.8}{6.7}.\frac{6.9}{7.8} = \frac{3}{7}$$

Do đó bất phương trình trở thành $\dfrac{3}{7}x > \dfrac{x^2}{7} - 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 28 < 0$

$\Leftrightarrow (x-7)(x+4) < 0$

Giải bất phương trình này ta được: $-4 < x < 7$.

23.13. Giải bất phương trình sau:

$$\left(\frac{2}{1.2} + \frac{2}{3.4} + ... + \frac{2}{99.100}\right).\frac{x^2 + x + 1945}{2} > 1975\left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + ... + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}\right).$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Xét $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{3.4} + ... + \dfrac{1}{99.100} = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{99} - \dfrac{1}{100}$

$$=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{100}\right)$$

$$=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{50}\right)=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+...+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}$$

Vậy $x^2+x+1945>1975 \Leftrightarrow x^2+x-30>0 \Leftrightarrow (x-5)(x+6)>0$.

Giải bất phương trình được $\left[\begin{array}{l} x<-6 \\ x>5 \end{array}\right.$

23.14. Giải bất phương trình sau:

$$\frac{x}{a^2-a+1}-\frac{1}{a+1}<\frac{x-1}{a^2-a+1}+\frac{2a(1-x)-a^2}{1+a^3}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Với $a \neq -1$ thì

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \frac{x}{a^2-a+1}-\frac{1}{a+1}<\frac{x}{a^2-a+1}-\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{2a-2ax-a^2}{1+a^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2-a+1}-\frac{1}{a+1}-\frac{-a^2-2ax+2a}{(a+1)(a^2-a+1)}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+1-a^2+a-1+a^2+2ax-2a}{(a+1)(a^2-a+1)}<0 \Leftrightarrow \frac{2ax}{(a+1)(a^2-a+1)}<0$$

Do $a^2-a+1=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0, \forall a$ nên ta chỉ xét $\frac{2ax}{a+1}<0$

Xét dấu của $\frac{a}{a+1}$ có: Nếu $a<-1$ hoặc $a>0$ thì $\frac{a}{a+1}>0$ nghiệm là $x<0$.

Nếu $-1<a<0$ thì $\frac{a}{a+1}<0$ có nghiệm là $x>0$

Nếu $a=0$ thì bất phương trình trở thành $0x<0$ vô nghiệm.

23.15. Cho $A=\left(\frac{6}{8}+1\right)\left(\frac{6}{18}+1\right)\left(\frac{6}{30}+1\right)...\left(\frac{6}{260}+1\right)$

$$B=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)...\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$$

Tìm x để $B<\frac{x-2}{30}<A$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $A=\left(\frac{6}{1.8}+1\right)\left(\frac{6}{2.9}+1\right)\left(\frac{6}{3.10}+1\right)...\left(\frac{6}{13.20}+1\right)$

$$=\frac{14}{1.8}.\frac{24}{2.9}.\frac{36}{3.10}......\frac{266}{13.20}=\frac{2.7}{1.8}.\frac{3.8}{2.9}.\frac{4.9}{3.10}......\frac{14.19}{13.20}$$

$$=\frac{2.3.4......13.14}{1.2.3...12.13}.\frac{7.8.9......18.19}{8.9.10......19.20}=\frac{49}{10}$$

$$B=\frac{3}{2.2}.\frac{8}{3.3}.\frac{15}{4.4}......\frac{99}{10.10}=\frac{1.3}{2.2}.\frac{2.4}{3.3}.\frac{3.5}{4.4}......\frac{9.11}{10.10}$$

$$=\frac{1.2.3......8.9}{2.3.4......9.10}.\frac{3.4.5......10.11}{2.3.4......9.10}=\frac{11}{20}$$

$$\frac{11}{20}<\frac{x-2}{30}<\frac{49}{10}\Leftrightarrow\frac{33}{60}<\frac{2x-4}{60}<\frac{294}{60}\Leftrightarrow 33<2x-4<294$$

$$\Leftrightarrow 37<2x<298\Leftrightarrow 18,5<x<149$$

23.16. Giải bất phương trình $\frac{x-3}{x-1}<3$.

(Thi tuyển sinh lớp 10 THPT Thừa Thiên –Huế, năm học 2001 – 2002)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\frac{x-3}{x-1}<3\Leftrightarrow\frac{x-3}{x-1}-3<0\Leftrightarrow\frac{x-3-3x+3}{x-1}<0\Leftrightarrow\frac{-2x}{x-1}<0\Leftrightarrow\frac{2x}{x-1}>0$$

Lập bảng xét dấu:

x		0		1	
$2x$	–	0	+	|	+
$x-1$	–	|	–	0	+
VT	+	||	–	||	+

Vậy $x>1;\ x<0$ là nghiệm của bất phương trình.

23.17. Giải bất phương trình $3+\frac{x^2-4}{x^2+6}-\frac{5}{x^2+1}<\frac{7}{x^2+3}+\frac{9}{x^2+5}$.

(Khảo sát chất lượng học sinh giỏi lớp 8 huyện Thường Tín – Hà Nội, năm học 2010 -2011)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$3+\frac{x^2-4}{x^2+6}-\frac{5}{x^2+1}<\frac{7}{x^2+3}+\frac{9}{x^2+5}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-4}{x^2+6}+\left(1-\frac{5}{x^2+1}\right)+\left(1-\frac{7}{x^2+3}\right)+\left(1-\frac{9}{x^2+5}\right)<0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-4}{x^2+6}+\frac{x^2-4}{x^2+1}+\frac{x^2-4}{x^2+3}+\frac{x^2-4}{x^2+5}<0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-4\right)\left(\frac{1}{x^2+6}+\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+3}+\frac{1}{x^2+5}\right)<0$$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2)<0 \Leftrightarrow -2<x<2$ do $\dfrac{1}{x^2+6}+\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{x^2+3}+\dfrac{1}{x^2+5}>0$.

Chuyên đề 24.

PHƯƠNG TRÌNH. BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa về giá trị tuyệt đối: $|A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0 \end{cases}$

2. Bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối:

a) Dạng 1: * $|f(x)| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < f(x) < \alpha \qquad (\alpha > 0)$

* $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x)$

b) Dạng 2: * $|f(x)| > \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > \alpha \\ f(x) < -\alpha \end{array}\right. \qquad (\alpha > 0)$

* $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right.$

c) Dạng 3: $|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2 > [g(x)]^2$

3. Một số bất đẳng thức quan trọng về giá trị tuyệt đối:

$|a| + |b| \geq |a+b|$ xảy ra dấu đẳng thức: $ab \geq 0$

và $|a| - |b| \leq |a-b|$ xảy ra dấu đẳng thức: $ab \geq 0$ và $|a| \geq |b|$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Giải các phương trình:

a) $|2x-9| = 2015.$ b) $|2x-3| = 3x-4.$

c) $(x-3)^2 + |2x-5| - (x+4)(x-4) = 0.$

** Tìm cách giải:* Các phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối dạng đơn (có một dấu | |). Ta sử dụng định nghĩa về giá trị tuyệt đối để giải.

Giải

a) *Cách 1:*

* Nếu $2x-9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{9}{2}$ thì $|2x-9| = 2x-9$

Ta có $2x-9 = 2015 \Leftrightarrow 2x = 2024 \Leftrightarrow x = 1012$ (Thỏa mãn)

* Nếu $2x-9 < 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{9}{2}$ thì $|2x-9| = 9-2x.$

Ta có $9-2x = 2015 \Leftrightarrow -2x = 2006 \Leftrightarrow x = -1003$ (thỏa mãn)

Nghiệm của phương trình là: $x = -1003; x = 1012.$

Cách 2: $|2x-9| = 2015 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-9 = 2015 \\ 2x-9 = -2015 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1012 \\ x = -1003 \end{array}\right.$

b) * Với $x \ge 1,5$ thì $|2x-3| = 2x-3$

Phương trình thành $2x-3 = 3x-4 \Leftrightarrow x = 1$ loại vì $x \ge 1,5$

* Với $x < 1,5$ thì $|2x-3| = 3-2x$

Phương trình trở thành $3-2x = 3x-4 \Leftrightarrow -5x = -7 \Leftrightarrow x = 1,4$ thỏa mãn.

Vậy nghiệm duy nhất của phương trình là $x = 1,4$.

Chú ý: Tránh mắc sai lầm $|2x-3| = 3x-4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-3 = 3x-4 \\ 2x-3 = 4-3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 1,4 \end{array}\right.$

Rồi kết luận luôn nghiệm của phương trình là $x = 1$ và $x = 1,4$

Sai lầm ở chỗ vế trái luôn không âm nên $3x-4 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \dfrac{4}{3}$. Do đó nếu giải kiểu này thì phải thử lại nghiệm trước khi kết luận.

c) $PT \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + |2x-5| - x^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow |2x-5| = 6x - 25.$

* Với $x \ge 2,5$ ta có $2x-5 = 6x-25 \Leftrightarrow x = 5.$

* Với $x < 2,5$ ta có $5-2x = 6x-25 \Leftrightarrow x = 3,75$ (loại).

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 5.$

Ví dụ 2: Giải các phương trình:

a) $x^2 - 3|x| = 18.$ b) $|x^2 - 4x - 1| = 31.$

c) $|x^2 - 2x + 4| = 8x - x^2 - 8.$

* *Tìm cách giải:* Sử dụng định nghĩa về giá trị tuyệt đối.

Giải

a) Với $x \ge 0$ thì $|x| = x; x^2 - 3|x| = 18 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 18 = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x-6) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 6 \end{array}\right.$. Loại $x = -3.$

Với $x < 0$ thì $|x| = -x;\ x^2 - 3|x| = 18 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 18 = 0$

$\Leftrightarrow (x+6)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -6 \end{array}\right.$. Loại $x = 3.$

Nghiệm của phương trình là $x = \pm 6.$

b) $|x^2 - 4x - 1| = 31 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x - 1 = 31 \\ x^2 - 4x - 1 = -31 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x - 32 = 0 \\ x^2 - 4x + 30 = 0 \end{array}\right.$

Phương trình $x^2 - 4x - 32 = 0 \Leftrightarrow (x-8)(x+4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = -4 \end{array}\right.$

Phương trình $x^2 - 4x + 30 = 0$ vô nghiệm

Vì $x^2-4x+30=(x-2)^2+26>0,\forall x$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=8$ và $x=-4$.

c) Do $x^2-2x+4=(x-1)^2+3>0,\forall x$ nên

$\left|x^2-2x+4\right|=x^2-2x+4$. Do đó $PT\Leftrightarrow x^2-2x+4=8x-x^2-8$

$\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow (x-3)(x-2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\x=2\end{array}\right.$

Ví dụ 3:

a) Giải phương trình: $\left|\left|2x-5\right|-7\right|+9=21$.

b) Giải phương trình: $\left|\left|\left|2x-1\right|-4\right|+8\right|-10=15$.

* *Tìm cách giải:* Các phương trình trên có nhiều dấu giá trị tuyệt đối lồng vào nhau (Dạng lồng): $\left|\left|ax+b\right|+c\right|+d=e$ hoặc $\left|\left|\left|ax+b\right|+c\right|+d\right|+e=h$

Ta sử dụng phương pháp bỏ dần các dấu giá trị tuyệt đối từ ngoài vào trong.

Giải

a) $PT\Leftrightarrow \left|\left|2x-5\right|-7\right|+9=21\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left|2x-5\right|-7=-12\\\left|2x-5\right|-7=12\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left|2x-5\right|=-5\text{ (loại)}\\\left|2x-5\right|=19\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-5=-19\\2x-5=19\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-7\\x=12\end{array}\right.$

b) $PT\Leftrightarrow \left|\left|\left|2x-1\right|-4\right|+8\right|=25\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left|\left|2x-1\right|-4\right|+8=-25\\\left|\left|2x-1\right|-4\right|+8=25\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left|\left|2x-1\right|-4\right|=-33\quad\text{(loại)}\\\left|\left|2x-1\right|-4\right|=17\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left|2x-1\right|-4=-17\\\left|2x-1\right|-4=17\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left|2x-1\right|=-13\quad\text{(loại)}\\\left|2x-1\right|=21\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1=-21\\2x-1=21\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-10\\x=11\end{array}\right.$

Ví dụ 4: Giải các phương trình:

a) $\left|x-3\right|+\left|3x-6\right|-\left|5-2x\right|=8$.

b) $\left|x^2-9\right|+\left|x^2-25\right|=26$.

c) $\left|x+1\right|+\left|x+2\right|+\left|2x+5\right|=10x$

* *Tìm cách giải*: Các phương trình có nhiều dấu giá trị tuyệt đối nhưng rời nhau (dạng rời) $\left|ax+b\right|+\left|cx+d\right|+...+\left|px+q\right|=m$

Ta lập bảng xét các giá trị tuyệt đối rồi giải phương trình. Câu c) ta nhận xét vế trái không âm nên suy ra ngay $x \geq 0$.

Giải

a) Lập bảng xét giá trị tuyệt đối (hay bảng phá dấu GTTĐ):

x		2		2,5		3	
$\lvert x-3 \rvert$	3 – x	$\vert$	3 - x	$\vert$	3 – x	0	x – 3
$\lvert 3x-6 \rvert$	6 – 3x	0	3x – 6	$\vert$	3x – 6	$\vert$	3x – 6
$\lvert 5-2x \rvert$	2x – 5	$\vert$	2x – 5	0	5 – 2x	$\vert$	5 – 2x
Vế trái	14 – 6x	$\vert$	0x + 2	$\vert$	4x – 8	$\vert$	6x – 14

Vậy: + Với $x < 2$ thì $14 - 6x = 8 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn).

+ Với $2 \leq x \leq 2{,}5$ thì $0x + 2 = 8$ Vô nghiệm.

+ Với $2 < x \leq 3$ thì $4x - 8 = 8 \Leftrightarrow x = 4$ (loại)

+ Với $x > 3$ thì $6x - 14 = 8 \Leftrightarrow x = \frac{11}{3}$ (thỏa mãn).

Nghiệm của phương trình: $x = 1$ và $x = 3\frac{2}{3}$

b) Lập bảng xét GTTĐ:

x^2		9		2,5	
$\lvert x^2-9 \rvert$	$9-x^2$	0	x^2-9	$\vert$	x^2-9
$\lvert x^2-25 \rvert$	$25-x^2$	$\vert$	$25-x^2$	0	x^2-25
Vế trái	$34-2x^2$	$\vert$	$0x^2-16$	$\vert$	$2x^2-34$

Với $x^2 \leq 9;\ 34 - 2x^2 = 26 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$

Với $9 < x^2 < 25;\ 0x^2 - 16 = 26$ (Vô nghiệm).

Với $x^2 \geq 25;\ 2x^2 - 34 = 26 \Leftrightarrow x^2 = 30 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{30}.$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \pm 2$ và $x = \pm\sqrt{30}.$

c) Phương trình $|x+1| + |2x+5| + |3x+2| = 10x$ có vế trái không âm nên $10x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$ do đó:

$x + 1 + 2x + 5 + 3x + 2 = 10x \Leftrightarrow x = 2$

Ví dụ 5: Giải phương trình $||3x-4|-5|-|x+2|=1$.

* *Tìm cách giải*: Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối có dạng hỗn hợp (vừa lồng vừa rời): $||ax+b|+c|+|dx+e|+...+|mx+n|=p$

Ta phối hợp linh hoạt các cách giải ở các ví dụ trên:

Giải

$(1) \Leftrightarrow ||3x-4|-5|=1+|x+2|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |3x-4|-5=1+|x+2| \\ |3x-4|-5=-1-|x+2| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |3x-4|-|x+2|=6 \\ |3x-4|+|x+2|=4 \end{array}\right.$$

a) Với $|3x-4|-|x+2|=6$ ta lập bảng xét giá trị tuyệt đối:

x		-2		$\frac{4}{3}$	
$\lvert 3x-4\rvert$	$4-3x$	|	$4-3x$	0	$3x-4$
$\lvert x+2\rvert$	$-2-x$	0	$x+2$	|	$x+2$
Vế trái	$6-2x$	|	$-4x+2$	|	$2x-6$

Với $x \le -2;\ 6-2x=6 \Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn)

Với $-2<x<\frac{4}{3};\ -4x+2=6 \Leftrightarrow x=-1$ (thỏa mãn)

Với $x \ge \frac{4}{3};\ 2x-6=6 \Leftrightarrow x=6$ (thỏa mãn)

b) Với $|3x-4|+|x+2|=4$ lập bảng xét giá trị tuyệt đối:

x		-2		$\frac{4}{3}$	
$\lvert 3x-4\rvert$	$4-3x$	|	$4-3x$	0	$3x-4$
$\lvert x+2\rvert$	$-2-x$	0	$x+2$	|	$x+2$
Vế trái	$2-4x$	|	$-2x+6$	|	$4x-2$

Với $x \le -2;\ 2-4x=6 \Leftrightarrow x=-1$ (không thỏa mãn).

Với $-2<x<\frac{4}{3};\ -2x+6=4 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn).

Với $x \ge \frac{4}{3};\ 4x-2=4 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-1;\ 0;\ 1;\ \frac{3}{2};\ 6\right\}$

Ví dụ 6: Giải các bất phương trình:

a) $|4x-5| < 25.$ b) $|2x-6| < x+2$

Tìm lời giải: Các bất phương trình có dạng $|f(x)| < \alpha$ và $|f(x)| < g(x)$. Do đó ta sử dụng định nghĩa về giá trị tuyệt đối để giải hoặc giải theo cách giải sau.

* $|f(x)| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < f(x) < \alpha\ (\alpha > 0)$

* $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x) \qquad (g(x) > 0)$

Sau khi giải xong lưu ý khi tập hợp nghiệm: nghiệm bất phương trình $|f(x)| < \alpha$ phải thỏa mãn đồng thời cả hai bất phương trình $f(x) < \alpha$ và $f(x) > -\alpha$; nghiệm bất phương trình $|f(x)| < g(x)$ phải thỏa mãn đồng thời cả hai bất phương trình $f(x) < g(x)$ và $f(x) > -g(x)$

Giải

a) $|4x-5| < 25 \Leftrightarrow -25+5 < 4x < 25+5$

$\Leftrightarrow -20 < 4x < 30 \Leftrightarrow -5 < x < 7{,}5$

b) *Cách 1:* Ta có $|2x-6| = 2x-6$ nếu $x \geq 3$

$|2x-6| = 6-2x$ nếu $x < 3$

Vì thế:

* Nếu $x \geq 3$ thì $|2x-6| < x+2 \Leftrightarrow 2x-6 < x+2 \Leftrightarrow x < 8 \Rightarrow 3 \leq x < 8.$

* Nếu $x < 3$ thì $|2x-6| < x+2 \Leftrightarrow 6-2x < x+2 \Leftrightarrow -3x < -4 \Leftrightarrow x > \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{4}{3} < x < 3.$

Kết hợp ta được nghiệm của bất phương trình là $\frac{4}{3} < x < 8.$

Cách 2: Ta có với $x > -2$ thì $x+2 > 0$

Ta có: $|2x-6| < x+2 \Leftrightarrow -x-2 < 2x-6 < x+2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-6 < x+2 \\ 2x-6 > -x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 8 \\ 3x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 8 \\ x > \frac{4}{3} \end{cases}$$

Nghiệm của bất phương trình là $\frac{4}{3} < x < 8.$

Ví dụ 7: Giải các bất phương trình và biểu diễn nghiệm trên trục số:

a) $|2x-7| > 15.$ b) $\left|\frac{2x+3}{x-1}\right| > 1$ (với $x \neq 1$)

c) $\left|x^2-3\right|>5-2x$

* *Tìm lời giải*: Các bất phương trình dạng $\left|f(x)\right|>\alpha$ và $\left|f(x)\right|>g(x)$

Do đó ta sử dụng định nghĩa về giá trị tuyệt đối để giải hoặc giải theo cách giải sau:

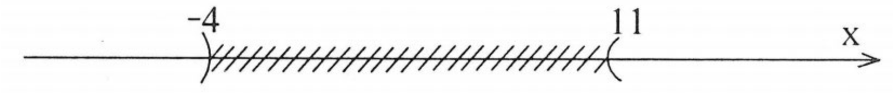
* $\left|f(x)\right|>\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)>\alpha \\ f(x)<-\alpha \end{array}\right. \; (\alpha>0)$

* $\left|f(x)\right|>g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)>g(x) \\ f(x)<-g(x) \end{array}\right.$

Sau khi giải xong lưu ý khi tập hợp nghiệm: nghiệm bất phương trình $\left|f(x)\right|>\alpha$ chỉ cần thỏa mãn một trong hai bất phương trình $f(x)>\alpha$ hoặc $f(x)<-\alpha$; nghiệm bất phương trình $\left|f(x)\right|>g(x)$ chỉ cần thỏa mãn một trong hai bất phương trình $f(x)>g(x)$ hoặc $f(x)<-g(x)$.

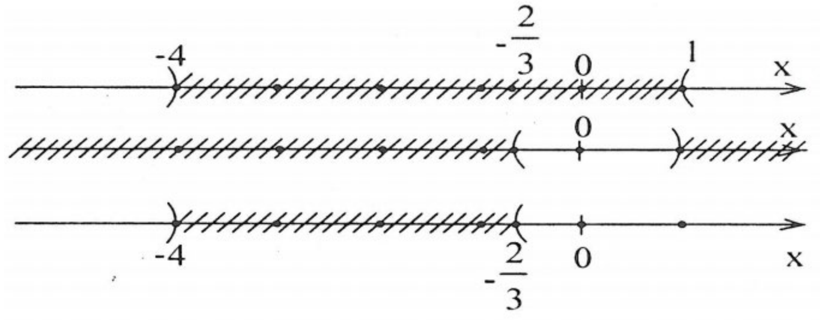
Giải

a) $\left|2x-7\right|>15 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-7>15 \\ 2x-7<-15 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x>22 \\ 2x<-8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>11 \\ x<-4 \end{array}\right.$



b) $\left|\dfrac{2x+3}{x-1}\right|>1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2x+3}{x-1}>1 \\ \dfrac{2x+3}{x-1}<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2x+3}{x-1}-1>0 \\ \dfrac{2x+3}{x-1}+1<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x+4}{x-1}>0 \; (*) \\ \dfrac{3x+2}{x-1}<0 \; (**) \end{array}\right.$

Giải (*) có $\left[\begin{array}{l} x<-4 \\ x>1 \end{array}\right.$. Giải (**) có $-\dfrac{2}{3}<x<1$. Hợp nghiệm $\left[\begin{array}{l} x<-4 \\ x>-\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$



* $\left[\begin{array}{l} x<-4 \\ x>1 \end{array}\right.$

** $-\dfrac{2}{3}<x<1$

$\left[\begin{array}{l} x<-4 \\ x>-\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

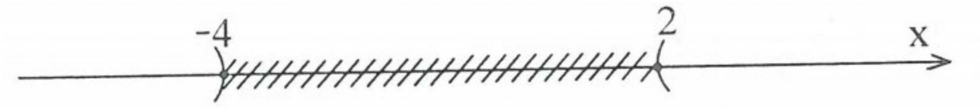
Nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left[\begin{array}{l} x<-4 \\ x>-\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

c) $\left|x^2-3\right|>5x-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3>5-2x \\ x^2-3<2x-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x-8>0(*) \\ x^2-2x+2<0(**) \end{array}\right.$

Giải (*): $x^2+2x-8>0 \Leftrightarrow (x+4)(x-2)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-4 \end{array}\right.$

Giải (**): Do $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0, \forall x$ nên (**) vô nghiệm.

Biểu diễn nghiệm:



Ví dụ 8: Giải các bất phương trình:

a) $|x-4|>|3x+9|$;

b) $|x|-|x-1|+|2x-5|<3x-6$

* *Tìm cách giải*: Các bất phương trình đã cho (viết tắt BPT) đều có nhiều biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối nhưng rời nhau. Ta lập bảng xét giá trị tuyệt đối của các biểu thức để giải bất phương trình.

Giải

a) *Cách 1:* Lập bảng xét giá trị tuyệt đối:

x		-3		4	
$\|x-4\|$	$4-x$	|	$4-x$	0	$x-4$
$\|3x+9\|$	$-3x-9$	0	$3x+9$	|	$3x+9$

* Với $x<-3$ thì (1) $\Leftrightarrow 4-x>-3x-9 \Leftrightarrow x>-6,5$

* Với $-3\le x\le 4$ thì $BPT \Leftrightarrow 4-x>3x+9 \Leftrightarrow x<-1,25$

* Với $x>4$ thì $BPT \Leftrightarrow x-4>3x+9 \Leftrightarrow x<-6,5$ (loại)

Hợp hai khoảng nghiệm: $-6,5<x<-3$ và $-3\le x<-1,25$ ta được nghiệm của bất phương trình là

$-6,5<x<-1,25$

Chú ý: Ta còn cách giải khác đơn giản hơn dựa vào:

$|f(x)|>|g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2>[g(x)]^2$

Cách 2: Bình phương hai vế ta có:

$BPT \Leftrightarrow x^2-8x+16>9x^2+54x+81 \Leftrightarrow 8x^2+62x+65<0$

$\Leftrightarrow (4x+5)(2x+13)<0 \Leftrightarrow -6,5<x<-1,25$

b) Lập bảng xét giá trị tuyệt đối:

x		-1		0		2,5	
$\|x\|$	$-x$	|	$-x$	0	x	|	x

$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	0	$x+1$	$\mid$	$x+1$	$\mid$	$x+1$
$\lvert 2x-5\rvert$	$5-2x$	$\mid$	$5-2x$	$\mid$	$5-2x$	0	$2x-5$

* Với $x<-1$. $BPT \Leftrightarrow -x+x+1+5-2x<3x-6$

$\Leftrightarrow -5x<-12 \Leftrightarrow x>2,4$ (loại)

* Với $-1\le x<0$. $BPT \Leftrightarrow -x-x-1+5-2x<3x-6$

$\Leftrightarrow -7x<-2 \Leftrightarrow x>\dfrac{2}{7}$ (loại)

* Với $0\le x<2,5$. $BPT \Leftrightarrow x-x-1+5-2x<3x-6$

$\Leftrightarrow -5x<-10 \Leftrightarrow x>2$

* Với $x\ge 2,5$. $BPT \Leftrightarrow -x-x-1+2x-5<3x-6$

$\Leftrightarrow -3x<0$ (đúng với mọi x)

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x>2$.

C. Bài tập vận dụng

24.1. Giải các phương trình:

a) $\left|\dfrac{x}{2}-\dfrac{6}{5}\right|=x-\dfrac{16}{5}$.   b) $x-\dfrac{2x+1}{5}=2-\dfrac{|3x-4|}{2}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Biến đổi $PT \Leftrightarrow |5x-12|=10x-32$

Ta có vì $|5x-12|\ge 0$ nên $10x-32\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 3,2$

Khi ấy $|5x-12|=5x-12$. Phương trình trở thành $5x-12=10x-32$ ta tìm được $x=4$ (thỏa mãn); Vậy nghiệm của phương trình là $x=4$.

b) Biến đổi $PT \Leftrightarrow 5|3x-4|=22-6x$

Xét với $x\ge \dfrac{4}{3}$ ta tìm được $x=2$. Xét với $x<\dfrac{4}{3}$ ta tìm được $x=-\dfrac{2}{9}$

24.2. Giải các phương trình:

a) $\big||2x|-3\big|-1=1$.   b) $\big||x|-2\big|=2x-6$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $PT \Leftrightarrow \big||2x|-3\big|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|2x|=5\\|2x|=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm 2,5\\x=\pm 0,5\end{array}\right.$

b) * Với $|x|\ge 2$ thì $\big||x|-2\big|=|x|-2$

Phương trình trở thành $\Leftrightarrow |x|-2=2x-6 \Leftrightarrow |x|=2x-4$

Với $x \ge 0$, ta có $x = 2x - 4 \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn)

Với $x < 0$, ta có $-x = 2x - 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$ (loại)

* Với $|x| < 2$ thì $||x| - 2| = 2 - |x|$

Phương trình trở thành $\Leftrightarrow 2 - |x| = 2x - 6 \Leftrightarrow |x| = 8 - 2x$

Với $x \ge 0$, ta có: $x = 8 - 2x \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$ (loại vì $|x| < 2$)

Với $x < 0$, ta có: $-x = 8 - 2x \Leftrightarrow x = 8$ (loại)

Phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 4$

24.3. Giải các phương trình:

a) $|4x + 5| + |4x - 5| = 10.$

b) $|2x - 6| + |x - 5| - |x + 2| = 5.$

c) $|x + 4| + 2|1 - 2x| - 3|x| = 5 - 4x.$

Hướng dẫn giải – đáp số

Lập bảng xét giá trị tuyệt đối rồi giải các phương trình.

a) Tập nghiệm là $-\frac{5}{4} \le x \le \frac{5}{4}$

b) Bảng xét giá trị tuyệt đối:

x		-2		3		5	
$\|2x-6\|$	$6-2x$	|	$6-2x$	0	$2x-6$	|	$2x-6$
$\|x-5\|$	$5-x$	|	$5-x$	|	$5-x$	0	$x-5$
$\|x+2\|$	$-x-2$	0	$x+2$	|	$x+2$	|	$x+2$
Vế trái	$-2x+13$	|	$-4x+9$	|	$0x-3$	|	$2x-13$

* Với $x < -2$ $PT \Leftrightarrow -2x + 13 = 5 \Leftrightarrow x = 4$ (loại)

* Với $-2 \le x < 3$ $PT \Leftrightarrow -4x + 9 = 5 \Leftrightarrow -4x < -4 \Leftrightarrow x = 1$

* Với $3 \le x < 5$ $PT \Leftrightarrow 0x - 3 = 5 \Leftrightarrow 0x = 8$ (vô nghiệm)

* Với $x \ge 2,5$ $PT \Leftrightarrow 2x - 13 = 5 \Leftrightarrow 2x = 18 \Leftrightarrow x = 9$

Tập nghiệm là $S = \{1; 9\}$

c) Lập bảng xét GTTĐ. Nghiệm là $x = -0,25; x = 0,5$

24.4. Giải phương trình:

a) $|x^2 - 2x - 1| = 2.$

b) $|x^2 - 6| = x.$

c) $4x - x^2 = |x - 1| + |x - 5|.$

d) $|x^2 - 25| - |x^2 - 9| = x^2 - 2x + 17.$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) PT $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-1=2 \\ x^2-2x-1=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-3)(x+1)=0 \\ (x-1)^2=0 \end{array}\right.$

Tập nghiệm: $S=\{-1;3;1\}$.

b) Lưu ý: $x \ge 0$. Tập nghiệm: $S=\{2;3\}$

c) Vế trái $4x-x^2=4-(4-4x+x^2)=4-(2-x)^2 \le 4$

Vế phải: áp dụng bất đẳng thức $|a|+|b| \ge |a+b|$ ta có

Vế trái: $|x-1|+|x-5|=|x-1|+|5-x| \ge |x-1+5-x|=4$

Suy ra vế phải bằng vế trái bằng $4 \Rightarrow x=2$.

d) Áp dụng bất đẳng thức: $|a|-|b| \le |a-b|$ ta có:

Vế trái $|x^2-25|-|x^2-9| \le |x^2-25-x^2+9|=16$

Mặt khác vế phải $x^2-2x+17=(x-1)^2+16 \ge 16$

Suy ra vế phải bằng vế trái và bằng 16 $\Rightarrow x=1$

24.5. Cho phương trình $|x-2|+|x-5|=m$ (với m là tham số). Hãy cho biết với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm, vô số nghiệm, vô nghiệm?

Hướng dẫn giải – đáp số

Lập bảng xét giá trị tuyệt đối:

x		2		5	
$\lvert x-2\rvert$	$2-x$	0	$x-2$	|	$x-2$
$\lvert x-5\rvert$	$5-x$	|	$5-x$	0	$x-5$
Vế trái	$7-2x$	|	$0x+3$	|	$2x-7$

* Với $x<2$ thì (1) $\Leftrightarrow 7-2x=m \Leftrightarrow x=\dfrac{7-m}{2}$ là nghiệm nếu $\dfrac{7-m}{2}<2 \Leftrightarrow m>3$

* Với $2 \le x \le 5$ thì (1) $\Leftrightarrow 0x=m-3$ vô số nghiệm nếu $m=3$

* Với $x>5$ thì (1) $\Leftrightarrow 2x-7=m \Leftrightarrow x=\dfrac{m+7}{2}$ là nghiệm nếu $\dfrac{m+7}{2}>5 \Leftrightarrow m>3$.

Vậy nếu $m>3$ thì (1) có hai nghiệm là $x=\dfrac{7-m}{2}$ và $x=\dfrac{m+7}{2}$

Nếu $m=3$ thì (1) có vô số nghiệm $2 \le x \le 5$.

Nếu $m<3$ thì (1) vô nghiệm.

24.6. Giải phương trình $|2|x|-5|=|x-3|+4$

Hướng dẫn giải – đáp số

PT $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2|x|-5=|x-3|+4\\2|x|-5=-4-|x-3|\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2|x|-|x-3|=9\\2|x|+|x-3|=1\end{array}\right.$

Lập bảng xét giá trị tuyệt đối tìm được tập nghiệm là $S=\{-12;6\}$

24.7. Giải phương trình $\left|2|x-5|-9\right|+\left|2|x-5|-11\right|=12.$

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $|x-5|=t\,(t\ge 0)$. Phương trình trở thành $|2t-9|+|2t-11|=12$

Lập bảng xét giá trị tuyệt đối tìm được $t=2$ và $t=8$

Với $t=2 \Leftrightarrow |x-5|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=7\\x=3\end{array}\right.$

Với $t=8 \Leftrightarrow |x-5|=8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=13\\x=-3\end{array}\right.$

24.8. Giải các bất phương trình:

a) $|x^2-4x+2|<14.$ b) $|x-3|<x^2+2x+3.$

c) $|2x-5|\le \dfrac{2x+5}{3}.$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) BPT $\Leftrightarrow -14<x^2-4x+2<14 \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-4x-12<0\\x^2-4x+16>0\end{cases}$

* $x^2-4x+16=(x-2)^2+12>0 \quad \forall x$

* $x^2-4x-12=(x-6)(x+2)<0 \Leftrightarrow -2<x<6$

Nghiệm của bất phương trình là $-2<x<6$

b) $|x-3|<x^2+2x+3 \Leftrightarrow -x^2-2x-3<x-3<x^2+2x+3 \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+3x>0\\x^2+x+6>0\end{cases}$

* $x^2+x+6=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{23}{4}>0, \forall x>0$

* $x^2+3x=x(x+3)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>0\\x<-3\end{array}\right.$

Nghiệm của bất phương trình là $\left[\begin{array}{l}x>0\\x<-3\end{array}\right.$

c) BPT $\Leftrightarrow \begin{cases}6x-15\le 2x+5\\6x-15\ge -2x-5\end{cases} \Leftrightarrow 1,25\le x\le 5$

24.9. Giải các bất phương trình:

a) $2\left|5x-1\right|>5x+1.$ b) $\left|\frac{1}{x-2}+1\right|>3.$

c) $\left|\frac{2x}{x+3}-1\right|>2.$ d) $\left|-x^2-2x-2016\right|\geq x^2+2018.$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) BPT $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2(5x-1)>5x+1\\2(5x-1)<-5x-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5x>3\\15x<1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>0,6\\x<\frac{1}{15}\end{array}\right.$

Nghiệm bất phương trình là $\left[\begin{array}{l}x>0,6\\x<\frac{1}{15}\end{array}\right.$

b) Với $x\neq 2$ bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l}\frac{1}{x-2}+1>3\\\frac{1}{x-2}+1<-3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{1}{x-2}-2>0\\\frac{1}{x-2}+4<0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{5-2x}{x-2}>0\\\frac{4x-7}{x-2}<0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2<x<\frac{5}{2}\\\frac{4}{7}<x<2\end{array}\right.$$

Hợp nghiệm được $\frac{7}{4}<x<\frac{5}{2}$ trừ $x=2$

c) Với $x\neq -3$. Tương tự (b) hoặc biến đổi $BPT \Leftrightarrow \left|\frac{x-3}{x+3}\right|>2$

Tìm được $-9<x<-1$ trừ $x=-3$

d) Ta có $\left|-x^2-2x-2016\right|=x^2+2x+2016$ (do $-x^2-2x-2016<0;\ \forall x$)

và $x^2+2018>0, \forall x$ nên $BPT \Leftrightarrow x^2+2x+2016\geq x^2+2018$

$\Leftrightarrow 2x\geq 2 \Leftrightarrow x\geq 1.$

24.10. Giải các bất phương trình:

a) $\frac{\left|2x-3\right|}{2+5+8+...+89}\geq\frac{1}{91}.$ b) $2-x\leq\left|x^2-4\right|.$

c) $\left|4x+5\right|>x^2-2x+5.$ d) $-2\left|3x-5\right|>x^2-x+1.$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $2+5+8+...+89=\frac{(2+89).30}{2}=91.15$

Do đó BPT $\Leftrightarrow \left|2x-3\right|\geq 15 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-3\geq 15\\2x-3\leq -15\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\geq 9\\x\leq -6\end{array}\right.$

b) BPT $\Leftrightarrow \left|x^2-4\right|\geq 2-x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4\ge 2-x \\ x^2-4\le x-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-2)(x+3)\ge 0 \\ (x-2)(x+1)\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x\ge 2 \\ x\le -3 \end{array}\right. \\ -1\le x\le 2 \end{array}\right.$$

Tổng hợp nghiệm: $\left[\begin{array}{l} x\ge -1 \\ x\le -3 \end{array}\right.$

c) BPT $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x+5>x^2-2x+5 \\ 4x+5<-(x^2-2x+5) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-6x<0 & (1c) \\ x^2+2x+10<0 & (2c) \end{array}\right.$

(1c) $\Leftrightarrow x(x-6)<0 \Leftrightarrow 0<x<6$

(2) Vô nghiệm

Nghiệm của bất phương trình là $0<x<6$.

d) Ta có $-2.\left|3x-5\right|\le 0;\ \forall x$ và $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0;\forall x$

Nên bất phương trình vô nghiệm.

24.11. Giải các bất phương trình:

a) $\left|x+5\right|<\left|x-3\right|$.

b) $\left|x-5\right|+\left|x-6\right|>3x-11$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Bình phương hai vế. Hoặc lập bảng xét giá trị tuyệt đối.

Nghiệm của (1) là $x<-1$.

b) Lập bảng xét giá trị tuyệt đối:

x		5		6	
$\left\|x-5\right\|$	$5-x$	0	$x-5$	|	$x-5$
$\left\|x-6\right\|$	$6-x$	|	$6-x$	0	$x-6$
Vế trái	$11-2x$	|	$0x+1$	|	$2x-11$

* Với $x<5$ thì (2) $\Leftrightarrow 11-2x>3x-11 \Leftrightarrow x<4,4$

* Với $5\le x\le 6$ thì (2) $\Leftrightarrow 0x+1>3x-11 \Leftrightarrow x<4$ (loại)

* Với $x>6$ thì (2) $\Leftrightarrow 2x-11>3x-11 \Leftrightarrow x<0$ (loại)

Vậy nghiệm của (2) là $x<4,4$

24.12. Giải các bất phương trình:

a) $\left|\left|x-4\right|-6\right|-8>2$.

b) $\left|\left|2x-3\right|-11\right|+5<6$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) BPT $\Leftrightarrow \left|\left|x-4\right|-6\right|>10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x-4\right|-6>10 \\ \left|x-4\right|-6<-10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x-4\right|>16 \\ \left|x-4\right|<-4 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4>16 \\ x-4<-16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>20 \\ x<-12 \end{array}\right.$

b) BPT $\Leftrightarrow \left||2x-3|-11\right|<1 \Leftrightarrow -1<|2x-3|-11<1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |2x-3|<12 \\ |2x-2|>10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12<2x-3<12 \\ \left[\begin{array}{l} 2x-2>10 \\ 2x-2<-10 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4,5<x<7,5 \\ \left[\begin{array}{l} x>6 \\ x<-4 \end{array}\right. \end{cases}$

Hợp nghiệm ta được nghiệm của BPT là $\left[\begin{array}{l} 6<x<7,5 \\ -4,5<x<-4 \end{array}\right.$

Một số đề thi:

24.13. Giải phương trình $|x|+|x+1|+|x+2|=7.$

(Đề thi vào lớp 10 chuyên, Quốc học Huế, năm học 1994-1995)

Hướng dẫn giải – đáp số

Lập bảng xét GTTĐ rồi xét các khoảng

* Nếu $x<-2$ thì PT $\Leftrightarrow -x-x-1-x-2=7 \Leftrightarrow x=-\frac{10}{3}$

* Nếu $-2 \le x<-1$ thì $PT \Leftrightarrow -x-x-1+x+2=7 \Leftrightarrow x=-6$ (loại)

* Nếu $-1 \le x \le 0$ thì $PT \Leftrightarrow -x+x+1+x+2=7 \Leftrightarrow x=4$ (loại)

* Nếu $x>0$ thì $PT \Leftrightarrow x+x+1+x+2=7 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$

Phương trình có hai nghiệm là $x=-\frac{10}{3}$ và $x=\frac{4}{3}$.

24.14. Giải phương trình $|x^2-1|+|x^2-4|=3.$

(Thi học sinh giỏi lớp 9 TP. Hồ Chí Minh, năm học 1994-1995)

Hướng dẫn giải – đáp số

$|x^2-1|+|x^2-4|=|x^2-1|+|4-x^2| \ge x^2-1+4-x^2=3$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (x^2-1)(4-x^2) \ge 0 \Leftrightarrow 1 \le x^2 \le 4 \Leftrightarrow 1 \le |x| \le 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 1 \\ x \le -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \le x \le 2 \\ -2 \le x \le -1 \end{array}\right.$

Nghiệm phương trình là $1 \le x \le 2;\ -2 \le x \le -1$

24.15. Giải phương trình $|x|-|x-2|=2.$

(Thi vào lớp 10 chuyên Lê Hồng Phong TP. Hồ Chí Minh, năm học 1995-1996)

Hướng dẫn giải – đáp số

Lập bảng xét GTTĐ rồi xét các khoảng:

* Với $x \le 0$ phương trình thành $-x-2+x=2 \Leftrightarrow 0x=4$ vô nghiệm.

* Với $0 \le x \le 2$ phương trình thành $x-2+x=2 \Leftrightarrow x=2$ (nhận).

* Với $x>2$ phương trình thành $x-x+2=2 \Leftrightarrow 0x+2=2$ vô số nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình là $x \ge 2$.

24.16. Giải phương trình $(x-1)^2+2|x-1|-8=0$

(Thi học sinh giỏi lớp 9 TP. Hồ Chí Minh, năm học 2001-2002)

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $y=|x-1|$ thì $y \ge 0$. Phương trình trở thành:

$y^2+2y-8=0 \Leftrightarrow (y-2)(y+4)=0 \Leftrightarrow y=2$ hoặc $y=-4$ (loại)

Vậy $y=2 \Leftrightarrow |x-1|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=2 \\ x-1=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Nghiệm của phương trình là $x=3$ và $x=-1$

24.17. Giải phương trình $|2x+5|=x^2+3x-1$

(Thi vào lớp 10 năng khiếu ĐHQG TP.Hồ Chí Minh, năm học 2003-2004)

Hướng dẫn giải – đáp số

* Nếu $x \ge 2{,}5$ thì $|2x+5|=2x+5$ khi ấy $2x+5=x^2+3x-1$

$\Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2)=0 \Leftrightarrow x=-3$ hoặc $x=2$. Loại $x=-3$

* Nếu $x<-2{,}5$ thì $|2x+5|=-2x-5$ khi ấy $-2x-5=x^2+3x-1$

$\Leftrightarrow x^2+5x+4=0 \Leftrightarrow (x+4)(x+1)=0 \Leftrightarrow \mathrm{x}=-4$ hoặc $x=-1$. Loại $x=-1$.

Nghiệm của phương trình là $x=2$ và $x=-4$

24.18. Giải phương trình $|x+1|+|x-1|=1+|x^2-1|$

(Đề thi tuyển sinh THPT chuyên ĐHQG Hà Nội, năm 2004)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $|ab|=|a|.|b|$ nên $|x+1|+|x-1|=1+|x^2-1| \Leftrightarrow |x+1|.|x-1|-|x+1|-|x-1|+1=0$

$\Leftrightarrow \left(|x+1|-1\right).\left(|x-1|-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} |x+1|-1=0 & (1) \\ |x-1|-1=0 & (2) \end{array}\right.$

* (1) $\Leftrightarrow x+1=\pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$; (2) $\Leftrightarrow x-1=\pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Tập nghiệm của phương trình là $S=\{-2;0;2\}$

24.19. Giải phương trình $|x-2005|^{2006}+|x-2006|^{2006}=1$

(Đề thi học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Thanh Hóa, năm học 2004-2005)

Hướng dẫn giải – đáp số

* Khi $x = 2005; x = 2006$ thì vế trái và vế phải đều cùng số trị là 1. Do đó $x = 2005$ và $x = 2006$ là nghiệm của phương trình.

* Với $x < 2005$ thì $|x - 2005| > 0$ và $|x - 2006| > 1$

Do đó $|x-2005|^{2006} + |x-2006|^{2006} > 1 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

* Với $x > 2006$ thì $|x - 2005| > 1$ và $|x - 2006| > 0$

Do đó $|x-2005|^{2006} + |x-2006|^{2006} > 1 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

* Với $2005 < x < 2006$ thì $0 < x - 2005 < 1$ và $-1 < x - 2006 < 0$

$\Rightarrow |x-2005|^{2006} < |x-2005| = x - 2005$ và $|x-2006|^{2006} < |x-2006| = 2006 - x$

$\Rightarrow |x-2005|^{2006} + |x-2006|^{2006} < x - 2005 + 2006 - x = 1 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2005$ và $x = 2006$

Chuyên đề 25.

GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA BIỂU THỨC

A. Kiến thức cần nhớ

1. Xét trong tập xác định (D):

a) Hằng số a là giá trị lớn nhất của A(x) với $x = x_o$ nếu:

$\forall x, A(x) \le A(x_o) = \text{a}$. Ký hiệu: $\max A(x) = a \Leftrightarrow x = x_o$

b) Hằng số b là giá trị nhỏ nhất của B(x) với $x = x_o$ nếu:

$\forall x, B(x) \ge B(x_o) = b$. Ký hiệu: $\min B(x) = b \Leftrightarrow x = x_o$

c) Hằng số a là giá trị lớn nhất của A(x, y,…_) với $x = x_o; y = y_o;...$

nếu $\forall x, y,... \quad A(x, y,....) \le A(x_o, y_o,....) = a$

Ký hiệu: $\max A(x, y,...) = a \Leftrightarrow x = x_o; y = y_o;...$

d) Hằng số b là giá trị nhỏ nhất của $B(x, y,...)$ với $x = x_o; y = y_o;...$

nếu $\forall x, y,... B(x, y,...) \ge B(x_o; y_o,...) = b$

Ký hiệu: $\min B(x, y,...) = b \Leftrightarrow x = x_o; y = y_o;...$

2. Định lý về cực trị:

a) *Nếu tổng hai số dương không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.*

b) Nếu tích của hai số dương không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.

3. Một số bất đẳng thức hay dùng: (đã nêu trong chuyên đề 21)

a. Bất đẳng thức Cauchy.

b. Bất đẳng thức Bunhiacôpxki.

c. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối.

d. Bất đẳng thức tam giác.

B. Một số ví dụ

1. Dạng tam thức bậc hai và đưa về tam thức bậc hai

Ví dụ 1:

a) Tìm giá trị lớn nhất của $A(x) = 2015 + 2x - x^2$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $B(x) = 2x^2 - 2(x - 5)$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của $C(y) = (y + 2)^2 + (y - 5)^2$

** Tìm lời giải:*

Để tìm giá trị lớn nhất của A(x) ta phân tích A(x) thành một số a trừ đi bình phương một tổng (hoặc hiệu).

Từ đó tìm x_o để $\forall x \ A(x) \le A(x_o) = a.$

Khi ấy $\max A(x) = a \Leftrightarrow x = x_o$

Để tìm giá trị nhỏ nhất của B(x) ta phân tích B(x) thành bình phương một tổng (hoặc hiệu) trừ đi một số b.

Từ đó tìm x_o để $\forall x\ B(x) \ge B(x_o) = b.$

Khi ấy $\min B(x) = b \Leftrightarrow x = x_o.$

Giải

a) $A(x) = 2015 + 2x - x^2 = 2016 - (x^2 - 2x + 1) = 2016 - (x-1)^2$

Do $(x-1)^2 \ge 0, \forall x$ nên $2016 - (x-1)^2 \le 2016, \forall x$

Do đó $\max A(x) = 2016 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

b) $B(x) = 2x^2 - 2x + 10 = 2\left(x^2 - x + 5\right) = 2\left(x^2 - 2x\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{19}{4}\right) = 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{19}{2}$

Do $2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \ge 0, \forall x.$ Nên $2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{19}{2} \ge \dfrac{19}{2} \forall x$

Do đó $\min B(x) = \dfrac{19}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

c) $C(y) = (y+2)^2 + (y-5)^2 = y^2 + 4y + 4 + y^2 - 10y + 25$

$= 2y^2 - 6y + 29 = 2\left(y^2 - 3y + \dfrac{29}{2}\right)$

$= 2\left(y^2 - 2y\dfrac{3}{2} + \dfrac{9}{4} + \dfrac{49}{4}\right) = 2\left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{49}{2} \ge \dfrac{49}{2}, \forall y$

Do đó $\min C(y) = 24,5 \Leftrightarrow y = 1,5.$

2. Dạng đa thức một biến bậc lớn hơn hai

Ví dụ 2:

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $C = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 18x + 15$

b) Tìm giá trị lớn nhất của $D = (y-2)(y-5)(y-6)(9-y)$

** Tìm cách giải:*

a) Sử dụng tách hoặc thêm bớt để biến đổi biểu thức làm xuất hiện các bình phương một nhị thức.

b) Hoán vị và nhân từng cặp làm xuất hiện các biểu thức có phần giống nhau $y^2 - 11y$ rồi đặt ẩn phụ để giải.

Giải

a) $C = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 3x^2 - 18x + 27 - 12$

$= x^2(x-3)^2 + 3(x-3)^2 - 12 = (x-3)^2(x^2+3) - 12$

Do $x^2 + 3 > 0\ \ \forall x; (x-3)^2 \ge 0, \forall x \Rightarrow (x-3)^2(x^2+3) - 12 \ge -12, \forall \text{x}.$

Nên $\min C = -12 \Leftrightarrow x = 3.$

b) $D = \left[(y-2)(9-\text{y})\right]\left[(y-5)(y-6)\right] = -\left(y^2 - 11y + 18\right)\left(y^2 - 11y + 30\right)$

Đặt $y^2 - 11y + 24 = z$ ta có: $D = -(z-6)(z+6) = 36 - z^2 \le 36\ \forall z.$

Vậy $\max D = 36 \Leftrightarrow z = 0 \Leftrightarrow y^2 - 11y + 24 = (y-3)(y-8) = 0$

$\Leftrightarrow y = 3; y = 8$

3. Dạng đa thức nhiều biến bậc hai

Ví dụ 3:

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A(x;y) = x^2 + 2x + 9y^2 - 6y + 2018$

b) Tìm x, y, z để đa thức $B(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$ có giá trị lớn nhất.

$B(x,y,z) = 1 - (2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 2x - 4y)$

** Tìm cách giải:*

a) Biến đổi biểu thức thành tổng các bình phương các nhị thức với một hằng số

b) Dùng tách, thêm bớt các hạng tử làm xuất hiện bình phương các biểu thức. Sử dụng hằng đẳng thức:

$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a+b+c)^2$

Giải

a) $A(x,y) = x^2 + 2x + 1 + 9y^2 - 6y + 1 + 2016 = (x+1)^2 + (3y-1)^2 + 2016$

Do $(x+1)^2 \ge 0, \forall x$ và $(3y-1)^2 \ge 0, \forall y$

Nên $(x+1)^2 + (3y-1)^2 + 2016 \ge 2016, \forall x; y$

Do đó $\min A(x,y) = 2016 \Leftrightarrow (x = -1; y = \frac{1}{3})$

b) $B(x,y,z) = 1 - \left[\left(x^2 - 2x + 1\right) + \left(y^2 - 4y + 4\right) + \left(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz\right) - 5\right]$

$= 6 - \left[\left(x-1\right)^2 + \left(y-2\right)^2 + \left(x+y-z\right)^2\right] \le 6, \forall x,y,z$

Do đó $\max B(x,y,z) = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$

4. Dạng phân thức

Ví dụ 4:

a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \dfrac{16}{x^2 - 2x + 19}$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 3}$.

c) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $C = \dfrac{1 + 2x - x^2}{x^2 - 2x + 2}$

Giải

a) Do $x^2 - 2x + 19 = (x-1)^2 + 18 \ge 18, \forall x$

$\Rightarrow \dfrac{1}{(x-1)^2+18} \le \dfrac{1}{18}, \forall x \Rightarrow A = \dfrac{16}{(x-1)^2+18} \le \dfrac{16}{18} = \dfrac{8}{9}, \forall x$

Vậy $\max A = \dfrac{8}{9} \Leftrightarrow x = 1$

b) $B = \dfrac{x^2+3-12}{x^2+3} = 1 - \dfrac{12}{x^2+3}$. Do $x^2+3 \ge 3\ \forall x$ nên $\dfrac{12}{x^2+3} \le 4 \Rightarrow 1 - \dfrac{12}{x^2+3} \ge -3, \forall x.$

Vậy $\min B = -3 \Leftrightarrow x = 0.$

c) $C = \dfrac{1+2x-x^2}{x^2-2x+2} = \dfrac{3-\left(x^2-2x+2\right)}{x^2-2x+2} = \dfrac{3}{x^2-2x+2} - 1$

Do $x^2-2x+2 = (x-1)^2+1 \ge 1\ \ \forall x$ nên $\dfrac{1}{(x-1)^2+1} \le 1 \Rightarrow \dfrac{3}{(x-1)^2+1} \le 3$

$\Rightarrow \dfrac{3}{(x-1)^2+1} - 1 \le 2, \forall x.$ Vậy $\max C = 2 \Leftrightarrow x = 1.$

5. Dạng chứng minh giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của biểu thức

Ví dụ 5:

a) Chứng minh giá trị lớn nhất của $A = \dfrac{-x^2+x-1}{x^2-2x+1} (x \ne 1)$ là $-\dfrac{3}{4}$ khi và chỉ khi $x = -1.$

b) Chứng minh giá trị nhỏ nhất của $B = \dfrac{x^2-2x+2}{x^2} (x \ne 0)$ là $\dfrac{1}{2}$ khi và chỉ khi $x = 2.$

** Tìm cách giải*:

\+ Phương pháp chứng minh $\max A(x) = a$ (a là hằng số).

Chứng minh $A(x) \le \text{a}, \forall x$ và có $\left(x_o\right)$ sao cho $A(x_o) = a$

\+ Phương pháp chứng minh $\min B(x) = b$ (b là hằng số).

Chứng minh $B(x) \ge b, \forall x$ và có $\left(x_o\right)$ sao cho $B(x_o) = b$

Giải

a) Ta chứng minh $A = \dfrac{-x^2+x-1}{x^2-2x+1} \le -\dfrac{3}{4} \forall x \ne 1.$ Thật vậy $\forall x \ne 1$

$$\frac{-x^2+x-1}{x^2-2x+1} \le -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{-x^2+x-1}{x^2-2x+1} + \frac{3}{4} \le 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2-2x-1}{x^2-2x+1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{-(x+1)^2}{(x-1)^2} \le 0$$

Hiển nhiên đúng. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

b) Ta chứng minh $B = \dfrac{x^2-2x+2}{x^2} \ge \dfrac{1}{2} \forall x \ne 0.$ Thật vậy $\forall x \ne 0.$

$$\frac{x^2-2x+2}{x^2} \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+2}{x^2} - \frac{1}{2} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4x+4}{2x^2} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{2x^2} \ge 0$$

Hiển nhiên đúng. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$

6. Dạng cùng tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một biểu thức

Ví dụ 6: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $M = \dfrac{10(x+2)}{x^2+5}$

Tìm cách giải: Biến đổi biểu thức M để có $a \le M \le b, \forall x$ (a, b là các hằng số).

Giải

$$M = \frac{\left(x^2+10x+25\right)-\left(x^2+5\right)}{x^2+5} = \frac{(x+5)^2}{x^2+5} - 1 \ge -1, \forall x$$

Do đó $\min M = -1 \Leftrightarrow x = -5$

* $M = \dfrac{5(x^2+5)-5(x^2-2x+1)}{x^2+5} = 5 - \dfrac{(x-1)^2}{x^2+5} \le 5, \forall x$

Do đó $\max M = 5 \Leftrightarrow x = 1$

7. Dạng bài tập áp dụng định lý, tính chất về cực trị

Ví dụ 7: Chứng minh định lý:

1) *Nếu tổng hai số dương không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.*

2) *Nếu tích của hai số dương không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.*

Áp dụng:

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = \dfrac{16}{x-2} + \dfrac{x}{4},$ với $x > 2$

b) Cho $7a + 9b = 42$ với $a, b > 0$. Tìm giá trị lớn nhất của tích $P = ab$

Giải

Gọi 2 số dương là a và b

Ta có $\left(a-b\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \ge 0 \Leftrightarrow (a+b)^2 \ge 4ab$

1) Nếu $a + b = k > 0$ không đổi thì $4ab \le k^2 \Leftrightarrow ab \le \dfrac{k^2}{4}$

Vậy $\max(a.b) = \dfrac{k^2}{4} \Leftrightarrow a = b = \dfrac{k}{2}$

2) Nếu $a.b = h > 0$ không đổi ta có $(a+b)^2 \ge 4h$

$\Rightarrow a + b \ge 2\sqrt{h}$. Do đó $\min(a+b) = 2\sqrt{h} \Leftrightarrow a = b = \sqrt{h}$

Áp dụng:

a) $T = \dfrac{16}{x-2} + \dfrac{x}{4} = \dfrac{16}{x-2} + \dfrac{x-2}{4} + \dfrac{2}{4}$

Ta có với $x > 2$ thì $\dfrac{16}{x-2}; \dfrac{x-2}{4}$ là 2 số dương có tích $\dfrac{16}{x-2}.\dfrac{x-2}{4} = 4$ không đổi nên tổng của chúng nhỏ nhất $\Leftrightarrow \dfrac{16}{x-2} = \dfrac{x-2}{4}$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 64.$ Phương trình có 2 nghiệm $x=10$ và $x=-6.$

Nghiệm $x=10$ thỏa mãn điều kiện của bài. Vậy $\min A = 4,5 \Leftrightarrow x=2.$

b) Xét $63P = 7a.9b$ trong đó $7a+9b=42$ không đổi nên tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.

$7a = 9b = 21.$ Vậy $\max P = 7 \Leftrightarrow a=3; b=\frac{7}{3}$

Ví dụ 8: Chứng minh tổng một số dương với nghịch đảo của nó có giá trị nhỏ nhất là 2.

Áp dụng:

a) Với $a,b>0$ tìm giá trị nhỏ nhất của $A=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

b) Với $a,b,c>0$ tìm giá trị lớn nhất của $B = 1-\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Giải

Gọi số dương là x . Thì số nghịch đảo của nó là $\frac{1}{x}$

Ta có tích $x.\frac{1}{x}=1$ không đổi nên tổng $x+\frac{1}{x}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $x=\frac{1}{x} \Leftrightarrow x=1$

Vậy $\min\left(x+\frac{1}{x}\right)=2 \Leftrightarrow x=1.$

a) $A=\left(a+b\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2=2.$ Do $\frac{a}{b}$ và $\frac{b}{a}$ là hai số dương nghịch đảo nhau. Theo chứng minh trên $A \ge 2+2=4.$

Vậy $\min A = 4 \Leftrightarrow a=b$

b) Ta có $C=\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$

Theo chứng minh trên ta có $C \ge 3+2+2+2=9$

Nên $B=1-C\le 1-9$. Vậy $\min B=-8 \Leftrightarrow x=y=z.$

8. Dạng bài tập các biến bị ràng buộc bởi các hệ thức

Ví dụ 9: Cho $x+y+z=6.$

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x^2+y^2+z^2.$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B=xy+yz+zx.$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A-2B.$

Giải

a) *Cách 1*: $x+y+z=6 \Rightarrow (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=36$

Mặt khác $x^2+y^2\geq 2xy; y^2+z^2\geq 2yz;\ z^2+x^2\geq 2zx$

Do đó cộng vế với vế của ba bất đẳng thức cùng chiều này ta được:

$2\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq 2\left(xy+yz+zx\right)\Rightarrow x^2+y^2+z^2+2\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq 36$

$\Rightarrow 3\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq 36$

Vậy $\min A=12\Leftrightarrow x=y=z=2$

Cách 2:Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki cho bộ 3 số 1, 1, 1 và x, y, z ta có

$(x.1+y.1+z.1)^2 \le \left(1^2+1^2+1^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)$

Hay $\left(x+y+z\right)^2 \le 3(x^2+y^2+z^2)$

Từ đó $A \ge \dfrac{(x+y+z)^2}{3} = \dfrac{36}{3} = 12, \forall x,y,z$

Vậy $\min A = 12 \Leftrightarrow x=y=z=2.$

b) Theo a) ta có $A+2B=36$ và $A \ge B \Rightarrow 3B \le A+2B=36$ nên $B \le 12$

$\Rightarrow \max B = 12 \Leftrightarrow x=y=z=2.$

c) Ta có $A+2B=36$ mà $B \le 12$ nên:

$A-2B = A+2B-4B \ge 36-48 \Rightarrow \min(A-2B) = -12 \Leftrightarrow x=y=z=2.$

9. Dạng bài chứa dấu giá trị tuyệt đối

Ví dụ 10:

a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \dfrac{1945-\left|2x-9\right|}{2015}$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \left|2x-5\right| + \left|2x-11\right|.$

c) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $C = 4\left|5x-8\right| - 16 - (5x-8)^2.$

Giải

a) Ta luôn có: $\forall x, \left|2x-9\right| \ge 0$ do đó $1945-\left|2x-9\right| \le 1945$ và $A = \dfrac{1945-\left|2x-9\right|}{2015} \le \dfrac{1945}{2015}.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2x-9=0 \Leftrightarrow x=4,5$

Do đó $\max A = \dfrac{1945}{2015} = \dfrac{389}{403} \Leftrightarrow x = 4,5$

b) *Cách 1:* Sử dụng $\left|a\right|+\left|b\right| \ge \left|a+b\right|$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ab \ge 0$

Ta có: $B = \left|2x-5\right| + \left|2x-11\right| = \left|2x-5\right| + \left|11-2x\right| \ge \left|(2x-5)+(11-2x)\right| = 6$

Vậy $B \ge 6$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (2x-5)(11-2x) \ge 0$

Lập bảng xét dấu:

x		2,5		5,5	
$2x-5$	-	0	+	|	+
$11-2x$	+	|	+	0	-
Vế trái	-	0	+	0	-

$(2x-5)(11-2x) \ge 0 \Leftrightarrow 2,5 \le x \le 5,5$

Do đó $\min B = 6 \Leftrightarrow 2,5 \le x \le 5,5$

Cách 2: Lập bảng xét giá trị tuyệt đối:

x		2,5		5,5	
$\|2x-5\|$	$5-2x$	0	$2x-5$	|	$2x-5$
$\|2x-11\|$	$11-2x$	|	$11-2x$	0	$2x-11$

* Với $x<2,5$ ta có $B=16-4x>6$ (1)

* Với $2,5\le x\le 5,5$ thì $B=6$ (2)

* Với $x>5,5$ ta có $B=4x-16>6$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có $\min B=6\Leftrightarrow 2,5\le x\le 5,5$

c) Đặt $|5x-8|=y$ thì

$$C=4|5x-8|-16-(5x-8)^2=4|5x-8|-16-|5x-8|^2$$
$$=-(y^2-4y+4)-12=-(y-2)^2-12\le -12$$

Vậy $\max C=-12\Leftrightarrow y=2\Leftrightarrow |5x-8|=2\Leftrightarrow x=2;x=1,2.$

C. Bài tập vận dụng

Dạng tam thức bậc hai và đưa về tam thức bậc hai

25.1. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $A(x)=4x^2+8x+15.$

b) $A(y)=(y+1)^2+(y-2)^2+(y-3)^2-(y+4)^2.$

c) $A(z)=(z+2)^3-(z-2)(z^2+2z+4).$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $A(x)=4\left(x+1\right)^2+11\ge 11,\forall x.$ Vậy $\min A(x)=11\Leftrightarrow x=-1$

b) $A(y)=2y^2-16y-2=2(y-4)^2-34\ge -34,\forall y.$ Vậy $\min A(y)=-34\Leftrightarrow y=4.$

c) $A(z)=6z^2+12z+16=6(z+1)^2+10\ge 10,\forall z.$ Vậy $\min A(z)=10\Leftrightarrow z=-1.$

25.2. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức:

a) $B(x)=15+6x-x^2.$

b) $B(y)=(y^2-2)^2+2(y-1)^2+(2-y^2)(2+y^2)$

c) $B(z)=\dfrac{11z^2-22z+33}{\left(\dfrac{1}{2^2}-1\right)\left(\dfrac{1}{3^2}-1\right)\left(\dfrac{1}{4^2}-1\right)...\left(\dfrac{1}{10^2}-1\right)}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $B(x)=24-(x^2-6x+9)=24-(x-3)^2\le 24,\forall x.$

Vậy $\max B(x)=24\Leftrightarrow x=3.$

b) $B(y) = -2y^2 - 4y + 10 = 12 - 2(y+1)^2 \le 12, \forall y.$

Vậy $\max B(y) = 12 \Leftrightarrow y = -1$

c) Rút gọn $\left(\frac{1}{2^2}-1\right)\left(\frac{1}{3^2}-1\right)\left(\frac{1}{4^2}-1\right)...\left(\frac{1}{10^2}-1\right) = -\frac{11}{20}$ (bạn đọc tự rút gọn)

Lưu ý $\frac{1}{2^2}-1 = -\frac{1.3}{2.2}; \frac{1}{3^2}-1 = -\frac{2.4}{3.3}; ...; \frac{1}{10^2}-1 = -\frac{9.11}{10.10}$

Do đó $B(z) = -20(z^2 - 2z + 3) = -40 - 20(z-1)^2 \le -40, \forall z.$

Vậy $\max B(z) = -40 \Leftrightarrow z = 1.$

Dạng đa thức một biến bậc lớn hơn hai

25.3.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = (x-3)(x-5)(x^2 - 8x + 17)$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $D = (1-x)(x^3 - 11x^2 + 41x - 55).$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $E = (x^2 + 9x + 18)(x^2 + x - 2) + 1.$

d) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = 2018 - \left[(x-2014)^4 + (x-2016)^4\right].$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $C = (x^2 - 8x + 15)(x^2 - 8x + 17)$

Đặt $x^2 - 8x + 16 = y$ ta có $C = (y-1)(y+1) = y^2 - 1 \ge -1, \forall y.$

Vậy $\min C = -1 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4.$

b) $D = (1-x)(x-5)(x^2 - 6x + 11) = -(x^2 - 6x + 5)(x^2 - 6x + 11)$

Đặt $x^2 - 6x + 8 = y$ ta có $D = -(y-3)(y+3) = 9 - y^2 \le 9, \forall y$

Vậy $\max D = 9 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 4 \end{array}\right.$

c) $E = (x+6)(x+3)(x+2)(x-1) + 1 = (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6) + 1$

Đặt $x^2 + 5x = y$ ta có $E = (y-6)(y+6) + 1 = y^2 - 36 + 1 \ge -35, \forall y$

Vậy $\min E = -35 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x = (x+5)x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -5.$

d) Đặt $x - 2015 = y$ thì $F = 2018 - \left[(y+1)^4 + (y-1)^4\right]$

Áp dụng hằng đẳng thức $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ ta có

$F = 2018 - 2(y^4 + 6y^2 + 1) = 2016 - 2(y^4 + 6y^2) \le 2016, \forall y$

Vậy $\max F = 2016 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x = 2015.$

Dạng đa thức nhiều biến bậc hai

25.4.

a) Tìm x, y để biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị đó:

$M(x, y) = x^2 - 2xy + 4y^2 + 12y + 22.$

b) Tìm x, y để biểu thức sau đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị đó:

$N(x, y) = 2006 - x^2 - 3y^2 - 2xy - 2x + 6y$

c) Tìm x, y, z để biểu thức sau đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị đó:

$P(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 - z^2 + 2x + 4y + 6z$

d) Tìm x, y, z, t để biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị đó:

$Q(x, y, z, t) = (x + y + z)^2 + x^2 + y^2 + 2t^2 + 2xt - 4y - 6t + 113.$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $M(x, y) = (x - y)^2 + 3(y + 2)^2 + 10 \geq 10, \forall x, y.$

Do đó $\min M(x, y) = 10 \Leftrightarrow (x = -2; y = -2).$

b) $N(x, y) = 2015 - (x + y + 1)^2 - 2(y - 2)^2 \leq 2015, \forall x, y.$

Do đó $\max N(x, y) = 2015 \Leftrightarrow (x = -3; y = 2).$

c) $P(x, y, z) = 15 - (x - 1)^2 - (y - 2)^2 - (z - 3)^2 \leq 15, \forall x, y, z$

Do đó $\max P(x, y, z) = 15 \Leftrightarrow (x = 1; y = 2; z = 3).$

d) $Q(x, y, z, t) = (x + y + z)^2 + (x + t)^2 + (y - 2)^2 + (t - 3)^2 + 100 \geq 100, \forall x, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{t}.$

Do đó $\min Q(x, y, z, t) = 100 \Leftrightarrow (x = -3; y = 2; \mathrm{z} = 1; \mathrm{t} = 3).$

25.5.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$R = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_{10}^2 - 4(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{10})$

b) Với $n \in N$ và $n > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$S = x_1^2 + 2^2 x_2^2 + 3^2 x_3^2 + ... + n^2 x_n^2 + 2(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + ... + nx_n) + 2n$

c) Với $n \in N$ và $n > 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$T = 2(50 + x_1 + 2x_2 + 3x_3 + ... + nx_n) - (1^2 + 2^2 + 3^3 + ... + n^2) - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + .. + x_n^2)$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $R = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2 + ... + (x_{10} - 2)^2 - 40 \geq -40, \forall x_i (i = 1; 2; ...; 10)$

$\mathrm{minR} = -40 \Leftrightarrow (x_1 = x_2 = ... = x_{10} = 2)$

b) Ta có $i^2 x_i^2 - 2ix_i + 1 = (ix_i - 1)^2$

Do đó $S=\left(x_1-1\right)^2+\left(2x_2-1\right)^2+\left(3x_3-1\right)^2+...+(nx_n-1)^2+n\ge n,\forall x_i(i=1;2;....;n)$

Do đó $\min S=n\Leftrightarrow x_1=1;x_2=\frac{1}{2};x_3=\frac{1}{3};...;x_n=\frac{1}{n}$.

c) Ta có $x_i^2-2ix_i+i^2=\left(x_i-i\right)^2\ (i=1;2;3;...;n)$. Do đó:

$T=100-\left(x_1-1\right)^2-\left(x_2-2\right)^2-\left(x_3-3\right)^2-...-\left(x_n-n\right)^2\le 100,\forall x_i$

Do đó $\max T=100\Leftrightarrow\left(x_1=1;x_2=2;x_3=3;...;x_n=n\right)$

Dạng phân thức

25.6.

a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\frac{200}{16x^2-8x+21}$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B=\frac{-50}{x^2-4x+6}$.

c) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $E=\frac{2015}{x^2+y^2-2(x+y)+2018}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $A=\frac{200}{(4x-1)^2+20}\le\frac{200}{20}=10,\forall x$. Vậy $\max A=10\Leftrightarrow x=0,25$

b) $B=\frac{-50}{(x^2-4x+4)+2}=\frac{-50}{(x-2)^2+2}\ge\frac{-50}{2}=-25\ \forall x$. Vậy $\min B=-25\Leftrightarrow x=2$.

c) $E=\frac{2015}{(x-1)^2+(y-1)^2+2016}\le\frac{2015}{2016}\ \ \forall x,y$. Vậy $\max E=\frac{2015}{2016}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

25.7.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $D=\frac{5x^2-2x+9}{x^2+2}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $E=\frac{5x^2+26}{x^2+5}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=\frac{4x^2-8x+16}{x^2+4}$.

d) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $G=\frac{4x^2+16x+38}{x^2+4x+8}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $D=\frac{4(x^2+2)+(x^2-2x+1)}{x^2+2}=4+\frac{(x-1)^2}{x^2+2}\ge 4,\ \forall x$. Vậy $\min D=4\Leftrightarrow x=1$.

b) $E=\frac{5(x^2+5)+1}{x^2+5}=5+\frac{1}{x^2+5}$.

Do $\forall x$ ta có $x^2+5\ge 5 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2+5}\le \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow 5+\dfrac{1}{x^2+5}\le \dfrac{26}{5}, \forall x \Rightarrow \max E = 5,2 \Leftrightarrow x=0.$

c) $F = 2+\dfrac{2(x-2)^2}{x^2+4}\ge 2, \forall x.$ Vậy $\min F = 2 \Leftrightarrow x=2.$

d) $Q = 4+\dfrac{6}{(x+2)^2+4}\le 4+\dfrac{6}{4}, \forall x \Rightarrow \max Q = 5,5 \Leftrightarrow x=-2.$

25.8.

a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+2x+1}.$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $g(x)=\dfrac{3x^2-12x+13-2(x-2)}{x^2-4x+4}$ với $x\ne 2.$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Với $x\ne -1; f(x)=\dfrac{3(x+1)-3}{(x+1)^2}=\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{3}{(x+1)^2}$. Đặt $y=\dfrac{1}{x+1}$

Ta có $f(x)=3y-3y^2=-3\left(y^2-2y\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\right)=-3\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\le \dfrac{3}{4}, \forall y$

Vậy $\max f(x)=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}$ hay $x=1.$

b) $g(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}-\dfrac{2}{x-2}+3=y^2-2y+1+2=(y-1)^2+2\ge 2\ \forall y$ với $y=\dfrac{1}{x-2}$ và với $x\ne 2.$ Vậy $\min g(x)=2\Leftrightarrow y=1$ hay $x=3.$

Dạng chứng minh giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của biểu thức

25.9.

a) Chứng minh giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x^2-6x+15$ là 6 khi và chỉ khi $x=3.$

b) Chứng minh giá trị lớn nhất của biểu thức $B=\dfrac{-x^2+4x+4}{x^2-4x+5}$ là 8 $\Leftrightarrow x=2.$

c) Cho $C=\dfrac{1+2y}{2+y^2}$ chứng minh rằng: $\max C=1\Leftrightarrow y=1$ và $\min C=-0,5\Leftrightarrow y=-2.$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta chứng minh $A\ge 6, \forall x.$ Thật vậy

$x^2-6x+15\ge 6\Leftrightarrow x^2-6x+9\ge 0\Leftrightarrow (x-3)^2\ge 0$ đúng $\forall x.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=3.$

b) Ta chứng minh $B\le 8, \forall x.$ Thật vậy: $\forall x,$ ta có:

$$\frac{-x^2+4x+4}{x^2-4x+5}\le 8\Leftrightarrow \frac{-x^2+4x+4-8(x^2-4x+5)}{x^2-4x+5}\le 0\Leftrightarrow \frac{-9(x-2)^2}{(x-2)^2+1}\le 0$$

Hiển nhiên đúng. Dấu "=' xảy ra $\Leftrightarrow x=2$.

c) Xét $C-1=\dfrac{1+2y}{2+y^2}-1=\dfrac{1+2y-2-y^2}{2+y^2}=\dfrac{-(y-1)^2}{2+y^2}\le 0,\forall y$. Như vậy $C\le 1,\forall y$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y=1$ nghĩa là $\max C=1\Leftrightarrow y=1$.

Xét $C+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1+2y}{2+y^2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2+4y+2+y^2}{2+y^2}=\dfrac{\left(y+2\right)^2}{2+y^2}\ge 0,\forall y$. Như vậy $C\ge -0,5,\forall y$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y=-2$ nghĩa là $\min C=-0,5\Leftrightarrow y=-2$.

25.10. Chứng minh rằng với $x\in Z$, các biểu thức:

a) $A=\dfrac{30}{4-x}$ có giá trị lớn nhất là $30\Leftrightarrow x=3$.

b) $B=\dfrac{x-26}{x-3}$ có giá trị lớn nhất là $24\Leftrightarrow x=2$.

c) $C=\dfrac{1975-x}{x-1945}$ có giá trị nhỏ nhất là $-31\Leftrightarrow x=1944$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Với $x>4$ thì $A<0$. Với $x\in Z$.

Xét $x<4$ thì mẫu 4 – x là số nguyên dương. Phân số A có tử và mẫu đều dương, tử bằng 30 không đổi nên A lớn nhất $\Leftrightarrow$ mẫu (4 – x) là số nguyên dương nhỏ nhất.

Do đó $4-x=1\Leftrightarrow x=3$ Khi đó $A=30$. Vậy $\max A=30\Leftrightarrow x=3$,

b) V*ới* $x\ne 3$ thì

$$B=\frac{x-26}{x-3}=\frac{(x-3)-23}{x-3}=1-\frac{23}{x-3}=1+\frac{23}{3-x}$$

B lớn nhất khi $\dfrac{23}{3-x}$ lớn nhất. Nếu $x>3$ thì $\dfrac{23}{3-x}<0$

Nếu $x<3$ thì $\dfrac{23}{3-x}>0$ nên $\dfrac{23}{3-x}$ lớn nhất $\Leftrightarrow (3-x)$ nhỏ nhất

$$\begin{cases}3-x>0\\ 3-x\\ (3-x)\in Z\end{cases}\text{ nhỏ nhất} \Rightarrow 3-x=1 \text{ hay } x=2.$$

Khi đó $\max B=24\Leftrightarrow x=2$

c) Với $x\ne 1945$ thì $C=\dfrac{1975-x}{x-1945}=\dfrac{30-(x-1945)}{x-1945}=\dfrac{30}{x-1945}-1$

Đặt $E=\dfrac{30}{x-1945}$ Ta có: C nhỏ nhất $\Leftrightarrow E$ nhỏ nhất

* Với $x>1945$ thì $E>0$

* Với $x<1945$ thì $E<0$ nên C nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ số đối của E lớn nhất $\Leftrightarrow \dfrac{30}{1945-x}$ lớn nhất. Do $1945-x>0$ nên $\dfrac{30}{1945-x}$ lớn nhất $\Leftrightarrow (1945-x)$ nhỏ nhất

$\begin{cases}1945-x>0\\(1945-x)\\1945-x\in Z\end{cases}$ nhỏ nhất $\Rightarrow 1945-x=1$. Khi đó $C=-31$.

Vậy $\min C=-31 \Leftrightarrow x=1944$.

Dạng cùng tìm giá tị lớn nhất và nhỏ nhất của một biểu thức

25.11. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $D=\dfrac{6x+1}{9x^2+2}$.

b) $E=\dfrac{x^2+4x+6}{x^2+2x+3}$.

c) $G=\dfrac{2x^2+2x+2}{x^2+2x+1}$ với $x\ge 0$.

d) $K=x+y$ với $x^2+y^2=50$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $D=\dfrac{(9x^2+2)-(9x^2-6x+1)}{9x^2+2}=1-\dfrac{(3x-1)^2}{9x^2+2}\le 1\ \forall x$.

Do đó $\max D=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$

$$D=\frac{12x+2}{2(9x^2+2)}=\frac{(9x^2+12x+4)-(9x^2+2)}{2(9x^2+2)}=\frac{(3x+2)^2}{2(9x^2+2)}-\frac{1}{2}\ge -\frac{1}{2}\forall x,$$

Do đó $\min D=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{3}$.

b) $E=\dfrac{2(x^2+2x+3)-x^2}{x^2+2x+3}=2-\dfrac{x^2}{x^2+2x+3}\le 2,\forall x$

Do đó $\max E=2 \Leftrightarrow x=0$

$$E=\frac{2x^2+8x+12}{2(x^2+2x+3)}=\frac{(x^2+2x+3)+(x^2+6x+9)}{2(x^2+2x+3)}=\frac{1}{2}+\frac{(x+3)^2}{2(x^2+2x+3)}\ge\frac{1}{2},\forall x$$

Do đó $\min E=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=-3$

c) $G=\dfrac{2(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)+x}=\dfrac{2}{1+\dfrac{x}{x^2+x+1}}\le 2,\forall x\ge 0$

Vậy $\max G=2 \Leftrightarrow x=0$

* Xét với $x>0$ thì $G=\dfrac{2x^2+4x+2-2x}{x^2+2x+1}=2-\dfrac{2x}{x^2+2x+1}=2-\dfrac{2}{x+2+\dfrac{1}{x}}$

Do $x+\frac{1}{x}\ge 2$ nên $2-\dfrac{2}{x+\frac{1}{x}+2}\ge \frac{3}{2},\forall x>0.$ Vậy $\min G=1,5\Leftrightarrow x=1.$

d) Ta có $2xy\le x^2+y^2\Rightarrow (x+y)^2\le 2(x^2+y^2)=100$

$\Rightarrow |x+y|\le 10\Rightarrow -10\le x+y\le 10$

Vậy $\max K=10\Leftrightarrow x=y=5;\min K=-10\Leftrightarrow x=y=-5$

Dạng bài tập áp dụng định lý, tính chất về cực trị

25.12.

a) Chứng minh trong các hình chữ nhật có cùng chu vi, hình vuông có diện tích lớn nhất.

b) Chứng minh trong các hình chữ nhật có cùng diện tích, hình vuông có chu vi nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng trực tiếp định lý về cực trị.

25.13.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B=\dfrac{(x+8)(2x+9)}{x}$ với $x>0$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C=\dfrac{x^2+3}{x+1}$ với $x\ge 0$

c) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $D=(x^2-5x-20)(28-x^2+5x)$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $B=\dfrac{2x^2+25x+72}{x}=2x+\dfrac{72}{x}+25$

Ta có với $x>0$ thì 2x và $\dfrac{72}{x}$ là hai số dương có tích bằng 144 không đổi nên tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau tức là:

$2x=\dfrac{72}{x}\Leftrightarrow x^2=36.$ Nghiệm $x=6$ thỏa mãn điều kiện của bài.

Vậy $\mathrm{minB}=49\Leftrightarrow \mathrm{x}=6$

b) $C=\dfrac{(x^2+2x+1)+4-2(x+1)}{x+1}=(x+1)+\dfrac{4}{x+1}-2$

Ta có với $x\ge 0,\ 2$ số dương $x+1$ và $\dfrac{4}{x+1}$ có tích bằng 4 không đổi.

Nên C nhỏ nhất $\Leftrightarrow x+1=\dfrac{4}{x+1}\Leftrightarrow (x+1)^2=4.$ Nghiệm $x=1$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Vậy $\min C=2\Leftrightarrow x=1$

c) Tổng $\left(x^2-5x-20\right)+\left(28-x^2+5x\right)=8$ không đổi nên tích của chúng lớn nhất khi hai số đó bằng nhau

$x^2-5x-20=28-x^2+5x \Leftrightarrow x^2-5x-24=0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x-8)=0 \Leftrightarrow x=-3; x=8$

Vậy $\max D=4.4=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=8 \end{array}\right.$

25.14.

a) Với $a,b,c>0$ tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $G=2020-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$.

b) Với $a,b,c,d>0$ tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H=(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)+4$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta đã biết $x+\frac{1}{x}\geq 2, \forall x>0.$ Do đó $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ (1)

Do vai trò của a, b, c là như nhau nên ta giả sử $a\geq b\geq c>0.$

Ta có $a-c\geq 0$ và $b(a-c)\geq c(a-c)\Rightarrow ab-bc+c^2\geq ac\Rightarrow \frac{b}{c}-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\geq 1$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\Rightarrow G=2020-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\leq 2017$

Vậy $\max G=2017 \Leftrightarrow a=b=c$ và $a,b,c>0$

b) $H=4+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{a}{d}+\frac{d}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{b}{d}+\frac{d}{b}\right)+\left(\frac{c}{d}+\frac{d}{c}\right)+4\geq 8+2.6=20$

Vậy $\min \mathrm{H}=20 \Leftrightarrow a=b=c=d$ và $a,b,c,d>0$

25.15. Với $x,y,z>0.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $K=x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y+z}\right)+y\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z+x}\right)+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+y}\right).$

b) $L=\frac{x^2+(y+z)^2}{x(y+z)}+\frac{y^2+(z+x)^2}{y(z+x)}+\frac{z^2(x+y)^2}{z(x+y)}.$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $K=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$

Ta có $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geq 3$ (xem bài tập 25.14) và $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq \frac{3}{2}$

(xem ví dụ 8 chuyên đề 20) $\Rightarrow K\geq 3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

Vậy $\min K=4,5 \Leftrightarrow x=y=z$ và $x,y,z>0$

b) Biến đổi $L=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}$

$=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\geq\frac{3}{2}+2+2+2$

Vậy $\min L=7,5\Leftrightarrow x=y=z$ và $x,y,z>0$

Dạng bài tập các biến bị ràng buộc bởi các hệ thức

25.16. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $D=a^2+b^2$ với $a;b>0$ và $a+b=4$.

b) $E=a^2+b^2+c^2$ với $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$.

c) $F=a^3+b^3+2ab$ biết $a+b=2$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $a+b=4\Rightarrow 16=a^2+b^2+2ab=2(a^2+b^2)-(\mathrm{a}-\mathrm{b})^2$

$\Rightarrow 16\leq 2(a^2+b^2)\Rightarrow a^2+b^2\geq 8.$ Vậy $\min D=8\Leftrightarrow a=b=2$

b) Ta có $3(a^2+b^2+c^2)\geq(a+b+c)^2$ (xem bài tập 21.1)

Do đó $3E\geq(a+b+c)^2=9.$ Vậy $\min E=3\Leftrightarrow a=b=c=1.$

c) $F=a^3+b^3+2ab=(a+b)(a^2-ab+b^2)+2ab$

Do $a+b=2$ nên $F=2(a^2-ab+b^2)+2ab=2a^2+2b^2=2a^2+2(2-a)^2$

$=4a^2-8a+8=4(a-1)^2+4\geq 4,\forall a.$ Vậy $F=4\Leftrightarrow a=b=1.$

25.17.

a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $G=2ab$ với $a+2b=2$;

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $H=1-\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)$ với $a,b,c\geq 0$ và $a+b+c\leq 3.$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $a+2b=2\Rightarrow a=2-2b\Rightarrow G=2ab=4(1-b)b=-4(b^2-b)$

$=-4\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+1\leq 1,\forall b.$ Vậy $\max\mathrm{G}=1\Leftrightarrow \mathrm{b}=\frac{1}{2}$ và $a=1.$

b) Đặt $a+1=x;b+1=y;c+1=z$ thì $x+y+z=a+b+c+3\leq 6$ nên $\frac{1}{x+y+z}\geq\frac{1}{6}$ và

Ta có $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$ (xem ví dụ 7 chuyên đề 21)

$\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{x+y+z}\geq\frac{9}{6}=\frac{3}{2}\Rightarrow 1-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\leq 1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$

$\max H=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=y=z=2 \Leftrightarrow a=b=c=1.$

Dạng bài tập chứa dấu giá trị tuyệt đối

25.18. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $L=|5x-2010|+|5x-2020|$;

b) $M=|x-2015|+|x-2016|+|x-2017|+|x-2018|$;

c) $N=(19x-8)^2-10|19x-8|+1970.$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Sử dụng bất đẳng thức $|a|+|b| \geq |a+b|$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ab \geq 0$

$$L=|5x-2010|+|5x-2020|$$
$$=|5x-2010|+|2020-5x| \geq |5x-2010+2020-5x|=10$$

Vậy $L \geq 10.$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (2020-5x)(5x-2010) \geq 0$

$\Leftrightarrow 402 \leq x \leq 404.$ Do đó $\min L=10 \Leftrightarrow 402 \leq x \leq 404$

(có thể lập bảng xét giá trị tuyệt đối để giải).

b) Đặt $M_1=|x-2015|+|x-2018|; M_2=|x-2016|+|x-2017|$

Giải tương tự a) ta có: $\min M_1=3 \geq \Leftrightarrow 2015 \leq x \leq 2018$

$\min M_2=1 \Leftrightarrow 2016 \leq x \leq 2017$

Vậy $\min M=4 \Leftrightarrow 2016 \leq x \leq 2017$

c) Đặt $|19x-8|=y$ thì $N=y^2-10y+25+1945=(y-5)^2+1945 \geq 1945$

Vậy $\min N=1945 \Leftrightarrow y=5 \Leftrightarrow |19x-8|=5 \Leftrightarrow x=\frac{13}{19}; x=\frac{3}{19}.$

25.19. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $P=8-\frac{|6+2y|}{5}.$

b) $Q=\frac{2014}{|7y-5|+60}-\frac{1954}{60}.$

c) $T=|x+5|-|x+2|.$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $\max P=8 \Leftrightarrow y=-3$

b) $\forall y$ ta có: $|7y-5| \geq 0 \Leftrightarrow |7y-5|+60 \geq 60 \Leftrightarrow \frac{1}{|7y-5|+60} \leq \frac{1}{60}$

$$\Leftrightarrow \frac{2014}{|7y-5|+60} \leq \frac{2014}{60} \Leftrightarrow \frac{2014}{|7y-5|+60}-\frac{1954}{60} \leq \frac{2014}{60}-\frac{1954}{60}=1$$

Vậy $\max Q = 1 \Leftrightarrow y = \dfrac{5}{7}$

c) Với $x \le -5$ thì $T = -x - 5 + x + 2 = -3$

Với $-5 < x < -2$ thì $T = x + 5 + x + 2 = 2x + 7$

Do $-5 < x < -2$ nên $-10 < 2x < -4 \Rightarrow -3 < T < 3$

Với $x \ge -2$ thì $T = x + 5 - x - 2 = 3$

Vậy $\max T = 3 \Leftrightarrow x \ge -2.$

25.20. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$S = |z-1| + |z-2| + |z-3| + ... + |z-99| + |z-100.|$

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $S_1 = |z-1| + |z-100|$; $S_2 = |z-2| + |z-99|$; $S_3 = |z-3| + |z-98|;...;S_{50} = |z-50| + |z-51|.$

Tương tự bài 24.18 a)

Ta có: $\min S_1 = 99 \Leftrightarrow 1 \le z \le 100$

$\min S_2 = 97 \Leftrightarrow 2 \le z \le 99$

$\min S_3 = 95 \Leftrightarrow 3 \le z \le 98$

....

$\min S_{49} = 3 \Leftrightarrow 49 \le z \le 52$

$\min S_{50} = 1 \Leftrightarrow 50 \le z \le 51$

Ta có $1 + 3 + 5 + ... + 97 + 99 = (1+99).50:2 = 2500$

Vậy $\min S = \min S_1 + \min S_2 + \min S_3 + ... + \min S_{49} + \min S_{50} = 2500$

$\Leftrightarrow 50 \le z \le 51$

25.21. Tìm tất cả các giá trị của x để hàm số $y = |x^2 + x + 16| + |x^2 + x - 6|$ đạt giá trị nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất đó.

(Thi vào lớp 10 THPT Chu Văn An & Hà Nội Amsterdam, năm học 2000-2001)

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng bất đẳng thức $|a| + |b| \ge |a + b|$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ab \ge 0$

Ta có $y = |x^2 + x + 16| + |6 - x^2 - x| \ge |x^2 + x + 16 + 6 - x^2 - x| = 22$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (x^2 + x + 16)(6 - x^2 - x) \ge 0 \Leftrightarrow 6 - x^2 - x \ge 0$ do $x^2 + x + 16 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{63}{4} > 0, \forall x$

Hay là $x^2 + x - 6 \le 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2) \le 0 \Leftrightarrow -3 \le x \le 2$

Vậy $\min y = 22 \Leftrightarrow -3 \le x \le 2.$

25.22. Cho biểu thức $A = -x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y$

Hãy tìm cặp số (x,y) để biểu thức A đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị đó.

(Thi vào lớp 10 THPT Chu Văn An & Hà Nội Amsterdam, năm học 2001-2002)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $2A = 8 - \left[(x^2-2xy+y^2)(x^2-4x+4)+(y^2-4y+4)\right]$

$= 8 - \left[(x-y)^2+(x-2)^2+(y-2)^2\right] \le 8$

$\Rightarrow \max A = 4 \Leftrightarrow x = y = 2.$

25.23. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{(x^3+y^3)-(x^2+y^2)}{(x-1)(\text{y}-1)}$ trong đó x, y là những số thực lớn hơn 1.

(Thi vào lớp 10 THPT chuyên ĐHQG Hà Nội, năm 2004)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$P = \frac{\left(x^3+y^3\right)-\left(x^2+y^2\right)}{(x-1)(y-1)} = \frac{x^2(x-1)+y^2(y-1)}{(x-1)(y-1)} = \frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}$$

Đặt $x-1=a$ và $y-1=b$, do $x>1$ và $y>1$ nên $a>0$ và $b>0$ đồng thời $x=a+1$ và $y=b+1$. Khi ấy

$$P = \frac{(a+1)^2}{b}+\frac{(b+1)^2}{a}$$

Áp dụng bất đẳng thức $(x+y)^2 \ge 4xy$ và $x+\dfrac{1}{x} \ge 2$ (với x >0) ta có:

$(a+1)^2 \ge 4a$; $(b+1)^2 \ge 4b$; Nên $P \ge \dfrac{4a}{b}+\dfrac{4b}{a} = 4\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right) \ge 8$

Vậy $\min P = 2 \Leftrightarrow a = b = 1$ hay $x = y = 2$.

25.24. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = 5x^2+9y^2-12xy+24x-48y+82$

(Thi vào lớp 10 THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2004-2005)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $P = (4x^2+9y^2+64-12xy+32x-48y)+(\text{x}^2-8x+16)+2 = (2x-3y+8)^2+(x-4)^2+2 \ge 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y+8=0 \\ x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=\dfrac{16}{3} \end{cases}$. Vậy $\min P = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=\dfrac{16}{3} \end{cases}$

25.25. Cho $x>0$. Tìm giá trị của x để biểu thức $N = \dfrac{x}{(x+2010)^2}$ đạt giá trị lớn nhất.

(Thi vào lớp 10 chuyên Toán THPT Lê Khiết – Quảng Ngãi, năm học 2009-2010)

Hướng dẫn giải – đáp số

Sử dụng bất đẳng thức $(a+b)^2 \ge 4ab$

Ta có: $(x+2010)^2 \ge 4.2010.x \Rightarrow N = \dfrac{x}{(x+2010)^2} \le \dfrac{1}{8040}$

Vậy $\max N = \dfrac{1}{8040}$, đạt được khi $x = 2010$.

25.26. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B = \dfrac{3x^2+6x+10}{x^2+2x+3}$

(Thi chọn học sinh năng khiếu lớp 8 huyện Lâm Thao – Phú Thọ, năm học 2009-2010)

Hướng dẫn giải – đáp số

$B = 3 + \dfrac{1}{x^2+2x+3} = 3 + \dfrac{1}{(x+1)^2+2} \le \dfrac{7}{2}$

$\Rightarrow \max B = 3,5 \Leftrightarrow x = -1.$

25.27. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y + 2010$ khi các số thực x, y thay đổi. Giá trị nhỏ nhất đó đạt được tại các giá trị nào của x và y.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên Quốc học Huế, năm học 2010-2011)

Hướng dẫn giải – đáp số

Xét $4P = (4x^2 + y^2 + 4 + 4xy - 8x - 4y) + 3y^2 - 8y + 8036$

$= (2x+y-2)^2 + 3\left(y^2 - \dfrac{8}{3}y + \dfrac{8036}{3}\right) = (2x+y-2)^2 + 3\left(y - \dfrac{4}{3}\right)^2 + \dfrac{24092}{3} \ge \dfrac{24092}{3}$

$\Rightarrow \min(4P) = \dfrac{24092}{3} \Rightarrow \min P = \dfrac{6023}{3} \Leftrightarrow y = \dfrac{4}{3}; x = \dfrac{1}{3}$

25.28. Cho số tự nhiên n có hai chữ số, chữ số hàng chục là x, chữ số hàng đơn vị là y (nghĩa là $x \ne 0$ và $n = 10x + y$). Gọi $M = \dfrac{n}{x+y}$

a) Tìm n để M = 2.

b) Tìm n để M nhỏ nhất,

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 phổ thông năng khiếu ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, năm học 2010 – 2011)

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $M = 2 \Leftrightarrow \dfrac{10x+y}{x+y} = 2 \Leftrightarrow 10x + y = 2x + 2y \Leftrightarrow y = 8x$

Vì x, y là các chữ số nên $1 \le x \le 9;\ 0 \le y \le 9 \Rightarrow x = 1; y = 8; n = 18$

b) $M = \dfrac{x+y+9x}{x+y} = 1 + \dfrac{9x}{x+y} = 1 + \dfrac{9}{1+\dfrac{y}{x}}$. M nhỏ nhất $\Leftrightarrow \dfrac{y}{x}$ lớn nhất.

$\Leftrightarrow y$ lớn nhất và x nhỏ nhất $\Rightarrow y = 9; x = 1$ và $n = 19 \Rightarrow MinM = \dfrac{19}{10}$

25.29. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $0 \le a \le 4;\ 0 \le b \le 4;\ 0 \le c \le 4;$ và $a+b+c=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$$

(Đề thi học sinh giỏi lớp 9 TP.Hà Nội, năm học 2013-2014)

Hướng dẫn giải – đáp số

Do vai trò a, b, c như nhau. Giả sử $a = \max\{a,b,c\}$ khi đó $2 \le a \le 4$. Ta có

$P = \dfrac{a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2}{2} = \dfrac{a^2+b^2+c^2+36}{2}$. Mặt khác vì $bc \ge 0$ nên

$a^2+b^2+c^2 = a^2+(b+c)^2-2bc \le a^2+(6-a)^2 = 2a^2-12a+36$

$= 2\left[(a-2)(a-4)+10\right] \le 20 \Rightarrow \max(a^2+b^2+c^2) = 20 \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge b; a \ge c; bc = 0 \\ (a-2)(a-4) = 0 \\ a+b+c = 6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (a;b;c) = (4;2;0)$ hoặc $(4;0;2)$

Khi đó $\max P = 28 \Leftrightarrow (a;b;c) = (4;2;0)$ và các hoán vị của nó.

Chuyên đề 26. ĐỒNG DƯ THỨC

A. Kiến thức cần nhớ

I. Định nghĩa: Cho số nguyên $m > 0$. Nếu hai số nguyên a và b khi chia cho m có cùng số dư thì ta nói a đồng dư với b theo môđun m và ký hiệu: $a \equiv b$ (mod m).

Chú ý: a) $a \equiv b$ (mod m) là một đồng dư thức với a là vế trái, b là vế phải.

b) $a \equiv b$ (mod m) $\Leftrightarrow a - b \vdots m \Leftrightarrow \exists t \in z$ sao cho $a = b + mt$

c) Nếu a và b không đồng dư với nhau theo môđun m ta ký hiệu: $a \not\equiv b$ (mod m).

II.Tính chất:

1. Tính chất phản xạ: $a \equiv a$ (mod m)

2. Tính chất đối xứng: $a \equiv b$ (mod m) $\Rightarrow b \equiv a$ (mod m)

3. Tính chất bắc cầu: $a \equiv b$ (mod m); $b \equiv c$ (mod m)$\Rightarrow a \equiv c$ (mod m).

4. Cộng hay trừ từng vế của đồng dư thức có cùng môđun:

$a \equiv b$ (mod m); $c \equiv d$ (mod m)$\Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d$ (mod m)

Tổng quát: $a_i \equiv b_i$ (mod m), $i = 1;2;...;k \Rightarrow a_1 \pm a_2 \pm ... \pm a_k \equiv b_1 \pm b_2 \pm ... \pm b_k$ (mod m)

5. a) Nhân hai vế của đồng dư thức với một số nguyên:

$a \equiv b$ (mod m)$\Rightarrow ka \equiv kb$ (mod m) với $k \in Z$.

b) Nhân hai vế và môđun của đồng dư thức với một số nguyên dương:

$a \equiv b$ (mod m) $\Rightarrow ka \equiv kb$ (mod m) với $k \in N^*$

6. Nhân từng vế của nhiều đồng dư thức có cùng môđun:

$a \equiv b$ (mod m); $c \equiv d$ (mod m) $\Rightarrow ac \equiv bd$ (mod m)

Tổng quát $a_i \equiv b_i$ (mod m), $i = 1;2;...;k \Rightarrow a_1 a_2 ... a_k \equiv b_1 b_2 ... b_k$ (mod m)

7. Nâng hai vế của một đồng dư thức lên cùng một lũy thừa:

$a \equiv b$ (mod m) $\Rightarrow a^k \equiv b^k$ (mod m) $(k \in N^*)$

8. Nếu hai số đồng dư với nhau theo nhiều môđun thì chúng đồng dư với nhau theo môđun là BCNN của các môđun ấy:

$a \equiv b$ (mod m_i) $i = 1;2;...;k \Rightarrow a \equiv b$ (mod $[m_1; m_2;\ldots;m_k]$)

Đặc biệt nếu $(m_i; m_j) = 1$ (i; j = 1; 2; …; k) thì $a \equiv b$ (mod m_i) $\Rightarrow a \equiv b$ (mod $m_1; m_2;\ldots;m_k$)

9. Nếu $a \equiv b$ (mod m) thì tập hợp các ước chung của a và m bằng tập hợp các ước chung của b và m.

Đặc biệt: $a \equiv b$ (mod m) $\Rightarrow (a,m) = (b,m)$

10. Chia hai vế và môđun của một đồng dư cho một ước dương chung của chúng:

$a \equiv b$ (mod m), $k \in UC(a,b,m), k > 0 \Rightarrow \frac{a}{k} \equiv \frac{b}{k}\left(\text{mod} \frac{m}{k}\right)$

Đặc biệt: $ac \equiv bc$ (mod m)$\Rightarrow a \equiv b\left(\text{mod } \frac{m}{(c,m)}\right)$

III. Một số định lý (ta thừa nhận không chứng minh)

1. Định lý Fermat bé. Cho a là số nguyên dương và p là số nguyên tố. Khi đó ta luôn có $a^p \equiv a(\bmod p)$.

Đặc biệt nếu $(a,p)=1$ thì $a^{p-1} \equiv 1(\bmod p)$

2. Định lý Wilson. Với mọi số nguyên tố p thì $(p-1)! \equiv -1(\bmod p)$

3. Định lý Euler. Cho m là số nguyên dương và a là số nguyên tố cùng nhau với m; $\varphi(m)$ là số các số nguyên dương nhỏ hơn m và nguyên tố cùng nhau với m.

Khi đó $a^{\varphi(m)} \equiv 1(\bmod m)$

Chú ý: Nếu số nguyên dương m có dạng phân tích thành thừa số nguyên tố:

$m = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.....p_k^{\alpha_k}$ thì $\varphi(m) = m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)...\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$

B. Một số ví dụ

1. Dạng toán tìm số dư trong phép chia có dư

* *Tìm cách giải:* Với hai số nguyên a và m, m > 0 luôn có duy nhất cặp số nguyên q, r sao cho $a = mq + r, 0 \le r < m.$ Để tìm số dư r trong phép chia a cho m ta cần tìm r sao cho $\begin{cases} a \equiv r(\bmod m) \\ 0 \le r < m \end{cases}$

Ví dụ 1: a) Tìm số dư trong phép chia $1532^5 - 1$ cho 9.

b) Tìm số dư trong phép chia $2016^{2018} + 2$ cho 5.

Giải

a) Ta có $1532 = 9.170 + 2 \equiv 2(\bmod 9)$ do đó $1532^5 \equiv 2^5(\bmod 9)$

$\Rightarrow 1532^5 - 1 \equiv 2^5 - 1(\bmod 9).$ Vì $2^5 - 1 = 31 \equiv 4(\bmod 9)$

Do đó $1532^5 - 1 \equiv 4(\bmod 9)$. Vậy số dư cần tìm là 4.

b) Ta có $2016 \equiv 1(\bmod 5)$ do đó $2016^{2018} \equiv 1^{2018}(\bmod 5)$

$\Rightarrow 2016^{2018} + 2 \equiv 1^{2018} + 2(\bmod\ 5)$. Vì $1 + 2 = 3 \equiv 3\ (\bmod 5)$.

Do đó $2016^{2018} + 2 \equiv 3(\bmod 5).$ Vậy số dư cần tìm là 3.

Ví dụ 2: Chứng minh $\left(2013^{2016} + 2014^{2016} - 2015^{2016}\right)^{10} \vdots 106$

Giải

Ta phải tìm số tự nhiên r sao cho

$0 = r \equiv (2013^{2016} + 2014^{2016} - 2015^{2016})^{10}\ (\bmod 106)$

Ta có $2013 = 106.19 - 1 \Rightarrow 2013 \equiv -1(\bmod 106) \Rightarrow 2013^{2016} \equiv 1(\bmod 106)$

$2014 = 106.19 \quad \Rightarrow 2014 \equiv 0(\bmod 106) \Rightarrow 2014^{2016} \equiv 0(\bmod 106)$

$2015 = 106.19 + 1 \Rightarrow 2015 \equiv 1(\bmod 106) \Rightarrow 2015^{2016} \equiv 1(\bmod 106)$

Do đó $\left(2013^{2016}+2014^{2016}-2015^{2016}\right)^{10} \equiv 0 \pmod{106}$

Ví dụ 3: a) Hãy tìm chữ số tận cùng của $9^{9^{10}}$

b) Hãy tìm hai chữ số tận cùng của 3^{1000}.

Giải

a) Tìm chữ số tận cùng của một số là tìm dư trong phép chia số đó cho 10.

Vì $9^{2n+1}=9.81^n \equiv 9 \pmod{10}$.

Do 9^{10} là số nên số $9^{9^{10}}$ có chữ số tận cùng là 9.

b) Tìm hai chữ số tận cùng của một số là tìm dư trong phép chia số đó cho 100.

Ta có $3^4 \equiv 81 \equiv -19 \pmod{100} \Rightarrow 3^8 \equiv (-19)^2 \pmod{100}$

Mà $(-19)^2=361 \equiv 61 \pmod{100}$ Vậy $3^8 \equiv 61 \pmod{100}$

$3^{10} \equiv 61.9=549 \equiv 49 \pmod{100}$

$3^{20} \equiv 49^2 \equiv 01 \pmod{100}$ (do $49^2=2401=24.100+1$)

Do đó $3^{1000} \equiv 01 \pmod{100}$ nghĩa là hai chữ số sau cùng của 3^{1000} là 01.

2. Dạng toán chứng minh sự chia hết:

Khi số dư trong phép chia a cho m bằng 0 thì $a \vdots m$. Như vậy để chứng tỏ $a \vdots m$ ta chứng minh $a \equiv 0 \pmod{m}$.

Ví dụ 4: Chứng minh $4^{2018}-7 \vdots 9$

Giải

Ta có $4^3=64 \equiv 1 \pmod 9 \Rightarrow 4^{2016}=(4^3)^{672} \equiv 1 \pmod 9$

Mặt khác $4^2=16 \equiv 7 \pmod 9 \Rightarrow 4^{2018}=4^{2016}.4^2 \equiv 1.7 \pmod 9$

Vậy $4^{2018}-7 \equiv 0 \pmod 9$ hay $4^{2018}-7 \vdots 9$

Ví dụ 5: Chứng minh rằng $12^{2n+1}+11^{n+2} \vdots 133 \, (n \in N)$

Giải

Cách 1: Ta có $12^2=144 \equiv 11 \pmod{133}$; $11^2=121 \equiv -12 \pmod{133}$

Do đó $12^{2n+1}=12.(12^2)^n \equiv 12.11^n \pmod{133}$

$11^{n+2}=11^2.11^n \equiv -12.11^n \pmod{133}$

Do đó $12^{2n+1}+11^{n+2} \equiv 12.11^n-12.11^n \equiv 0 \pmod{133}$

Vậy với $n \in N$ thì $12^{2n+1}+11^{n+2} \vdots 133$

Cách 2: Ta có $12^2=144 \equiv 11 \pmod{133} \Rightarrow 12^{2n} \equiv 11^n \pmod{133}$ (1)

Mà $12 \equiv -11^2 \pmod{133}$ (2) Nhân vế với vế của (1) và (2) ta có:

$12^{2n}.12 \equiv 11^n.(-11^2)(\bmod 133) \Rightarrow 12^{2n+1} \equiv -11^{n+2} \ (\bmod 133)$

$12^{2n+1} + 11^{n+2} \equiv 0(\bmod 133)$ hay $12^{2n+1} + 11^{n+2} \vdots 133$

3. Dạng toán xác định dấu hiệu chia hết

Ví dụ 6: Cho số $a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$ $(1 \le a_n \le 9;\ 0 \le a_i \le 9;\ i = 0;1;...;n-1)$

Hãy xác định dấu hiệu chia hết:

a) Cho 3. b) Cho 4.

Giải

Ta có $a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0} = a_n.10^n + a_{n-1}10^{n-1} + ... + \mathrm{a}_1.10 + a_0$

a) Ta có $10 \equiv 1(\bmod 3)$ do đó $a_i 10^i \equiv a_i (\bmod 3), i = 1;2;3;...;n$

Do đó $a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + ... + \mathrm{a}_1 10 + a_o \equiv (a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_o)\ (\bmod 3)$

Vậy $a \vdots 3 \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + .. + a_1 + a_o \equiv 0 (\bmod 3)$

$\Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + .. + a_1 + a_o \vdots 3$

b) Ta có $10^2 = 100 \equiv 0(\bmod 4) \Rightarrow a_i 10^i \equiv 0(\bmod 4), i = 2;3;...;\mathrm{n}$

$\Rightarrow a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + ... + a_1 10 + a_o \equiv (a_1 10 + a_o)(\bmod 4)$

Vậy $a \vdots 4 \Leftrightarrow a_1 10 + a_0 \equiv 0(\bmod 4) \Leftrightarrow \overline{a_1 a_o} \vdots 4$

4. Dạng toán sử dụng các định lý:

Ví dụ 7: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì:

$2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 2007$ chia hết cho 22

Giải

Theo định lý Fermat bé ta có $2^{10} \equiv 1(\bmod 11); 3^{10} \equiv 1(\bmod 11)$

Ta có $3^4 = 81 \equiv 1(\bmod 10) \Rightarrow 3^{4n+1} = 3.(3^4)^n \equiv 3(\bmod 10)$

$\Rightarrow 3^{4n+1} = 10k + 3, (\mathrm{k} \in N)$

Mặt khác $2^4 = 16 \equiv 1(\bmod 5) \Rightarrow 2^{4n} \equiv 1(\bmod 5)$

$\Rightarrow 2^{4n+1} = 2(2^4)^n \equiv 2(\bmod 10) \Rightarrow 2^{4n+1} = 10t + 2, (t \in N)$

Do đó $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 2007 = 2^{10k+3} + 3^{10t+2} + 2002 + 5$

$= 2^3(2^{10})^k + 3^2(3^{10})^t + 22.91 + 5 \equiv 2^3 + 3^2 + 0 + 5 \equiv 0(\bmod 11)$

Mà $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 2007 \vdots 2$ (vì $2^{3^{4n+1}}$ là số chẵn, $3^{2^{4n+1}}$ là số lẻ, 2007 là số lẻ)

Do $(2;11) = 1$ nên $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 2007 \vdots 22$

Ví dụ 8: Cho $a_1; a_2; ...; a_{2016}$ là 2016 số nguyên dương. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + ... + a_{2016}^5 \vdots 30$ là $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2016} \vdots 30$.

Giải

Theo định lý Fermat bé, do 2; 3; 5 là các số nguyên tố và a là số nguyên dương bất kỳ ta có:

$a^2 \equiv a(\text{mod}\,2) \Rightarrow a^4 = (a^2)^2 \equiv a^2 \equiv a(\text{mod}\,2) \Rightarrow a^5 \equiv a(\text{mod}\,2)$

$a^3 \equiv a(\text{mod}\,3) \Rightarrow a^5 = a^3.a^2 \equiv a.a^2 \equiv a^3 \equiv \text{a}(\text{mod}\,3)$

$a^5 \equiv a(\text{mod}\,5)$

Theo tính chất nếu hai số đồng dư với nhau theo nhiều môđun thì chúng đồng dư với nhau theo môđun là BCNN của các môđun ấy.

Do đó $a^5 \equiv a(\text{mod } 2.3.5)$ hay $a^5 \equiv a(\text{mod}\,30) \Rightarrow a^5 - a \equiv 0(\text{mod}\,30)$

Nghĩa là $\left(a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + ... + a_{2016}^5\right) - \left(a_1 + a_2 + ... + a_{2016}\right) \equiv 0(\text{mod}\,30)$

Vậy $a_1 + a_2 + ... + a_{2016} \,\vdots\, 30 \Leftrightarrow a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + ... + a_{2016}^5 \,\vdots\, 30$

Ví dụ 9: Chứng minh rằng trong các số tự nhiên thế nào cũng có số k sao cho $1983^k - 1$ chia hết cho 10^5

(Đề thi học sinh giỏi toán cấp 2 toàn quốc năm 1983).

Giải

Vì 1983 không chia hết cho 2 và không chia hết cho 5 mà $10^5 = 2^5.5^5$ nên $(1983;10^5) = 1$. Áp dụng định lý Euler ta có:

$1983^{\varphi(10^5)} \equiv 1(\text{mod}\,10^5)$

Ta có $\varphi(10^5) = 10^5\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 4.10^4$. Nghĩa là $1983^{4.10^4} - 1 \,\vdots\, 10^5$

Vậy $k = 4.10^4$.

5. Dạng toán khác

Ví dụ 10: Chứng minh rằng $1^{4k} + 2^{4k} + 3^{4k} + 4^{4k}$ không chia hết cho 5.

Giải

Do 5 là số nguyên tố nên theo Định lý Fermat bé ta có: với a = 1; 2; 3; 4 ta có:

$a^5 \equiv a(\text{mod}\,5) \Leftrightarrow a^4 \equiv 1(\text{mod}\,5) \Leftrightarrow a^{4k} \equiv 1(\text{mod}\,5).$

Do đó $1^{4k} + 2^{4k} + 3^{4k} + 4^{4k} \equiv 1 + 1 + 1 + 1 \equiv 4(\text{mod}\,5)$

Chứng tỏ $1^{4k} + 2^{4k} + 3^{4k} + 4^{4k} \,\not\vdots\, 5$

Ví dụ 11: Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p tồn tại vô số số có dạng $2^n - n, (n \in N)$ chia hết cho p.

(Thi vô địch Canada năm 1983).

Giải

* Nếu $p = 2$ thì $2^n - n \,\vdots\, 2, \forall n = 2k\,(k \in N)$

* Nếu $p \neq 2$ do $(2;p) = 1$ nên theo định lý Fermat bé ta có:

$2^{p-1} \equiv 1(\text{mod}\,p) \Rightarrow 2^{p-1} - 1 \equiv 0(\text{mod}\,p) \Rightarrow 2^{(p-1)^{2k}} - 1 \equiv 0(\text{mod}\,p)$

Hay là $2^{(p-1)^{2k}}-1\,\vdots\, p\ (k\in N;k\ge 2)$

Mặt khác $(p-1)^{2k}\equiv(-1)^{2k}\equiv 1(\bmod p)$

$$\Rightarrow 2^{(p-1)^{2k}}-(p-1)^{2k}=\underbrace{\left[2^{(p-1)^{2k}}-1\right]}_{\vdots p}-\underbrace{\left[(p-1)^{2k}-1\right]}_{\vdots p}\vdots\, p$$

Vậy tồn tại vô số số tự nhiên n có dạng $n=(p-1)^{2k},(\forall k\in N;k\ge 2)$ sao cho $2^n-n\,\vdots\, p$

C. Bài tập vận dụng

Dạng toán tìm số dư trong phép chia có dư

26.1. Tìm số dư trong phép chia

a) $8!-1$ cho 11.

b) $2014^{2015}+2016^{2015}+2018$ cho 5.

c) $2^{50}+41^{65}$ cho 7.

d) $1^5+3^5+5^5+...+97^5+99^5$ cho 4.

Hướng dẫn giải – đáp số

Với những bài toán dạng này, phương pháp chung là tính toán để đi đến $a\equiv b(\bmod m)$ với b là số có trị tuyệt đối nhỏ nhất có thể được (tốt nhất là $b=\pm 1$) từ đó tính được thuận lợi $a^n\equiv b^n(\bmod m)$

a) $8!=1.2.3.4.5.6.7.8$

Ta có $3.4=12\equiv 1(\bmod 11);\ 2.6=12\equiv 1(\bmod 11);\ 7.8\equiv 1(\bmod 11)$

Vậy $8!\equiv 5(\bmod 11)\Rightarrow 8!-1\equiv 4(\bmod 11)$

Số dư trong phép chia $8!-1$ cho 11 là 4.

b) $2014\equiv -1(\bmod 5)\Rightarrow 2014^{2015}\equiv -1(\bmod 5)$

$2016\equiv 1(\bmod 5)\Rightarrow 2016^{2015}\equiv 1(\bmod 5);\ \ 2018\equiv 3(\bmod 5)$

$2014^{2015}+2016^{2015}+2018\equiv 3(\bmod 5)$

c) $2^3\equiv 1(\bmod 7)\Rightarrow 2^{50}=(2^3)^{16}.4\equiv 4(\bmod 7)$

$41\equiv -1(\bmod 7)\Rightarrow 41^{65}\equiv(-1)^{65}\equiv -1(\bmod 7)$

$2^{50}+41^{65}\equiv 4-1\equiv 3(\bmod 7)$

d) $1^5\equiv 1(\bmod 4);\ 3^5\equiv -1(\bmod 4);\ \ 5^5\equiv 1(\bmod 4);...;97^5\equiv 1(\bmod 4);99^5\equiv -1(\bmod 4).$ Đáp số : Dư 0.

26.2. Tìm số dư trong phép chia:

a) 1532^5-4 cho 9.

b) 2^{2000} cho 25.

c) $2014^{2015^{2016}}$ cho 13.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $1532\equiv 2(\bmod 9)\Rightarrow 1532^5\equiv 2^5\equiv 5(\bmod 9)$

$\Rightarrow 1532^5-4\equiv 1(\bmod 9)$

b) $2^5=32\equiv 7(\bmod 25)\Rightarrow 2^{10}=(2^5)^2\equiv 7^2\equiv -1(\bmod 25)$

$2^{2000} = (2^{10})^{200} \equiv (-1)^{200} \equiv 1 (\bmod 25)$

c) $2014 = 155.13 - 1$ nên $2014 \equiv -1 (\bmod 13)$; $2015^{2016} = 2k + 1 (k \in N)$

$\Rightarrow 2014^{2015^{2016}} \equiv (-1)^{2k+1} \equiv -1 (\bmod 13)$. Đáp số : dư 12

26.3. Tìm số dư trong phép chia:

a) $A = 35^2 - 35^3 + 35^4 - 35^8 + 35^{16} + 35^{32}$ cho 425.

b) $B = 10^{10} + 10^{10^2} + 10^{10^3} + ... + 10^{10^{100}}$ cho 7.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có $35^2 = 1225 = 425.3 - 50 \equiv -50 (\bmod 425)$

$35^3 = 35^2.35 \equiv -50.35 \equiv -1750 \equiv -50 (\bmod 425)$

$35^4 = (35^2)^2 \equiv (-50)^2 \equiv 2500 \equiv -50 (\bmod 425)$

Tương tự với $35^8; 35^{16}; 35^{32}$. Từ đó có $A \equiv -100 (\bmod 425)$

Hay số dư trong phép chia A cho 425 là 325

b) Ta có $10^5 = 7.14285 + 5 \equiv 5 (\bmod 7)$; $10^6 = 5.10 \equiv 1 (\bmod 7)$

$10^n - 4 = \underbrace{\overline{99...96}}_{n-1 \text{ số } 9} \equiv 0 (\bmod 2)$ và $\underbrace{\overline{99...96}}_{n-1 \text{số } 9} \equiv 0 (\bmod 3) \Rightarrow 10^n - 4 \equiv 0 (\bmod 6)$

$\Rightarrow 10^n \equiv 4 (\bmod 6)$ và $10^n = 6k + 4 (k, n \in N^*)$

Do đó $10^{10^n} = 10^{6k+4} = (10^6)^k.10^4 \equiv 10^4 (\bmod 7)$

Vậy $B \equiv 10^4 + 10^4 + 10^4 + ... + 10^4 \equiv 10.10^4 \equiv 10^5 \equiv 5 (\bmod 7)$

26.4. a) Tìm chữ số tận cùng của 4^{3^2}

b) Tìm hai chữ số tận cùng của 3^{999}

c) Tìm ba chữ số tận cùng của số 2^{512}

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta tìm dư trong phép chia số đó cho10.

Vì $4^2 \equiv 6 (\bmod 10)$ nên $4^{3^2} = 4^9 = (4^2)^4.4 \equiv 6.4 \equiv 4 (\bmod 10) \Rightarrow$ chữ số tận cùng là 4

b) Ta tìm dư trong phép chia số đó cho 100. Theo ví dụ 3 chuyên đề 26 ta đã có $3^{1000} \equiv 01 (\bmod 100)$ nghĩa là hai chữ số sau cùng của 3^{1000} là 01. Số 3^{1000} là bội số của 3 nên chữ số hàng trăm của nó khi chia cho 3 phải có số dư là 2 để chia tiếp thì 201 chia hết cho 3 (nếu số dư là 0 hay 1 thì 001; 101 đều không chia hết cho 3). Vậy số $3^{999} = 3^{1000} : 3$ có hai chữ số tận cùng bằng 201 : 3 =67.

c) Ta tìm dư trong phép chia đó cho 1000. Do 1000 = 125.8 trước hết ta tìm số dư của 2^{512} cho 125. Từ hằng đẳng thức:

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ ta có nhận xét nếu $a \vdots 25$ thì $(a+b)^5 \equiv b^5 (\bmod 125)$

Vì $2^{10}=1024\equiv -1(\bmod 25)$ nên $2^{10}=25k-1(k\in N)$.

Từ nhận xét trên ta có $2^{50}=(2^{10})^5=(25k-1)^5\equiv -1(\bmod 125)$

Vì vậy $2^{512}=(2^{50})^{10}.2^{12}\equiv(-1)^{10}.2^{12}\equiv 2^{12}(\bmod 125)$

Do $2^{12}=2^{10}.2^2=1024.4\equiv 24.4\equiv 96(\bmod 125)$

Vậy $2^{512}\equiv 96(\bmod 125)$

Hay $2^{512}=125m+96,\ m\in N$

Do $2^{512}\vdots 8, 96\vdots 8$ nên $m\vdots 8\Rightarrow m=8n\,(n\in N)$

$2^{512}=125.8n+96=1000n+96$. Vậy ba chữ số tận cùng của số 2^{512} là 096.

Dạng toán chứng minh sự chia hết

26.5. Chứng minh:

a) $41^{2015}-6\vdots 7$; b) $2^{4n+1}-2\vdots 15\ (n\in N)$.

c) $3^{76}-2^{76}\vdots 13$. d) $20^{15}-1\vdots 341$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Để chứng tỏ $a\vdots m$ ta chứng minh $a\equiv 0(\bmod m)$

a) $41=42-1\equiv -1(\bmod 7)$. Do đó $41^{2015}\equiv(-1)^{2015}\equiv -1(\bmod 7)$

hay $41^{2015}\equiv 6(\bmod 7)\Rightarrow 41^{2015}-6\equiv 0(\bmod 7)$

b) Ta có $2^4=16\equiv 1(\bmod 15)\Rightarrow 2^{4n}\equiv 1(\bmod 15)\Rightarrow 2^{4n}-1\equiv 0(\bmod 15)$

Do đó $2^{4n+1}-2=2(2^{4n}-1)\equiv 0(\bmod 15)$

c) Ta có $3^3=27\equiv 1(\bmod 13)$; $3^{76}=(3^3)^{25}.3\equiv 3(\bmod 13)$

Ta có $2^4\equiv 3(\bmod 13)\Rightarrow 2^6\equiv 12\equiv -1(\bmod 13)$

$2^{76}=(2^6)^{12}.2^4\equiv 3(\bmod 13)$

Do đó $3^{76}-2^{76}\equiv 0(\bmod 13)$ hay $3^{76}-2^{76}\vdots 13$

d) $341=11.31$

* Ta có $2^5=32\equiv -1(\bmod 11); 20=22-2\equiv -2(\bmod 11)$

Do đó $20^{15}\equiv(-2)^{15}\equiv -(2^5)^3\equiv 1(\bmod 11)$

* $20^{15}=(2^5)^3.(5^3)^5\equiv 1(\bmod 31)$ do $2^5\equiv 1(\bmod 31)$ và $5^3\equiv 1(\bmod 31)$

Do đó $20^{15}\equiv 1(\bmod 11.31)$ hay $20^{15}\equiv 1(\bmod 341)\Rightarrow 20^{15}-1\vdots 341$

26.6. Chứng minh $1890^{79}+1945^{2015}+2017^{2018}\vdots 7$.

Hướng dẫn giải – đáp số

$1890\equiv 0(\bmod 7); 1945\equiv -1(\bmod 7);\ 2017\equiv 1(\bmod 7)$

$1890^{79} \equiv 0 (\text{mod } 7)$; $1945^{2015} \equiv -1 (\text{mod } 7)$; $2017^{2018} \equiv 1 (\text{mod } 7) \Rightarrow$ đpcm.

26.7. a) Chứng minh $5555^{2222} + 2222^{5555} + 15554^{1111} \vdots 7$

b) Cho $M = 220^{119^{69}} + 119^{69^{220}} + 69^{220^{119}} + (220 + 119 + 69)^{102}$

Chứng minh $M \vdots 102.$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có $5555 = 793.7 + 4 \equiv 4 (\text{mod } 7)$; $2222 = 318.7 - 4 \equiv -4 (\text{mod } 7)$

$\Rightarrow 5555^{2222} + 2222^{5555} \equiv 4^{2222} + (-4)^{5555} \equiv -4^{2222}(4^{3333} - 1)(\text{mod } 7)$

Do $4^{3333} - 1 = \left[\left(4^3\right)^{1111} - 1\right]$; $4^3 = 64 \equiv 1 (\text{mod } 7)$ nên $(4^3)^{1111} \equiv 1 (\text{mod } 7)$

Hay $4^{3333} - 1 \equiv 0 (\text{mod } 7)$. Do đó $5555^{2222} + 2222^{5555} \equiv 0 (\text{mod } 7)$

và $15554^{1111} = (2.7777)^{1111} = 2^{1111}.7777^{1111} \equiv 0 (\text{mod } 7) \Rightarrow$ đpcm

b) Ta có $102 = 2.3.17.$ Ta có $(220 + 119 + 69)^{102} \equiv 0 (\text{mod } 102)$

* $220 \equiv 0 (\text{mod } 2); 119 \equiv -1 (\text{mod } 2); 69 \equiv 1 (\text{mod } 2) \Rightarrow M \equiv 0 (\text{mod } 2)$

* $220 \equiv 1 (\text{mod } 3); 119 \equiv -1 (\text{mod } 3); 69 \equiv 0 (\text{mod } 3) \Rightarrow M \equiv 0 (\text{mod } 3)$

* $220 \equiv -1 (\text{mod } 17); 119 \equiv 0 (\text{mod } 17); 69 \equiv 1 (\text{mod } 17) \Rightarrow M \equiv 0 (\text{mod } 17)$

(Để ý 119^{69} và 69^{220} là các số lẻ); $\Rightarrow M \equiv 0 (\text{mod } 2.3.17).$ Hay $M \vdots 102$

26.8. Chứng minh rằng $5^{2n-1}2^{n+1} + 2^{2n-1}3^{n+1} \vdots 38$ $(n \in N^*)$

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $A = 5^{2n-1}2^{n+1} + 2^{2n-1}3^{n+1}$. Ta có $A \vdots 2, \forall n \in N^*$;

Ta có $A = 2^n(5^{2n-1}2 + 2^{n-1}3^{n+1}) = 2^n(25^{n-1}10 + 6^{n-1}9)$

Do $25 \equiv 6 (\text{mod } 19) \Rightarrow A \equiv 2^n(6^{n-1}10 + 6^{n-1}9) \equiv 2^n 6^{n-1} 19 \equiv 0 (\text{mod } 19)$

Hay $A \vdots 19$. Mà $(2;9) = 1 \Rightarrow A \vdots 19.2 \Rightarrow A \vdots 38$

Dạng toán xác định dấu hiệu chia hết

26.9. Cho số $a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_i a_o}$ $(1 \le a_n \le 9;\ 0 \le a_i \le 9;\ i = 0;1;...;n-1)$

Hãy xác định dấu hiệu chia hết:

a) Cho 9. b) Cho 25. c) Cho 11. d) Cho 8.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có : $a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_o} = a_n.10^n + a_{n-1}10^{n-1} + ... + a_1 10 + a_o$

a) Ta có $10 \equiv 1 (\text{mod } 9)$ do đó $a_i 10^i \equiv a_i (\text{mod } 9), \text{i} = 1;2;3;...;\text{n}$

do đó $a \equiv \left(a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_o\right)(\text{mod } 9)$. Vậy

$a \vdots 9 \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_o \equiv 0 (\text{mod } 9) \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_o \vdots 9$

b) Ta có $10^2=100\equiv 0(\bmod 25)\Rightarrow a_i10^i\equiv 0(\bmod 25), \mathrm{i}=2;3;...;n$

$\Rightarrow a\equiv (a_1 10+a_o)(\bmod 25)$

Vậy $a\vdots 25\Leftrightarrow a_1 10+a_o\equiv 0(\bmod 25)\Leftrightarrow \overline{a_1a_o}\vdots 25$

c) Do $10\equiv -1(\bmod 11)\Rightarrow a_i.10^i\equiv a_i(-1)^i(\bmod 11)$

$a\equiv (a_o+a_2+a_4+...)-(\mathrm{a}_1+a_3+a_5+...)(\bmod 11)$

Do đó $a\vdots 11\Leftrightarrow (a_o+a_2+a_4+...)-(a_1+a_3+a_5+...)\equiv 0(\bmod 11)$

Tức là hiệu của tổng các chữ số ở vị trí lẻ và tổng các chữ số ở vị trí chẵn bằng 0.

d) Ta có $10^3=1000\equiv 0(\bmod 8)\rightarrow a_i10^i\equiv 0(\bmod 8), i=3;4;...;n$

$\Rightarrow a\equiv (a_2 10^2+a_1 10+a_o)(\bmod 8)$

Vậy $a\vdots 8\Leftrightarrow a_2 10^2+a_1 10+a_o\equiv 0(\bmod 8)\Leftrightarrow \overline{a_2a_1a_o}\vdots 8$

Dạng toán sử dụng các định lý cơ bản

26.10. Cho $A=2^{2^{10n+1}}+19$ với $n\in N^*$. Chứng minh rằng A là một hợp số.

Hướng dẫn giải – đáp số

Theo định lý Fermat bé, do 11 là số nguyên tố nên ta có

$2^{10}\equiv 1(\bmod 11)\Rightarrow 2^{10n}\equiv 1(\bmod 11)$

$\Rightarrow 2^{10n+1}=2.2^{10n}\equiv 2(\bmod 22)\Rightarrow 2^{10n+1}=22k+2(k\in N)$

Do 23 là số nguyên tố ta cũng có

$2^{22}\equiv 1(\bmod 23)\Rightarrow 2^{2^{10n+1}}=2^{22k+2}=4.2^{22k}\equiv 4(\bmod 23)\Rightarrow 2^{2^{10n+1}}+19\equiv 4+19\equiv 0(\bmod 23)$

Tức là $A\vdots 23$. Mà $A>23,\forall n\ge 1$ nên A là hợp số.

26.11. Cho $B=(12!)^{13}+2016^{2015}$. Chứng minh rằng B chia hết cho 13.

Hướng dẫn giải – đáp số

Theo định lý Wilson: Với mọi số nguyên tố p thì $(p-1)!\equiv -1(\bmod p)$

Do 13 nguyên tố nên $12!\equiv -1(\bmod 13)\Rightarrow (12!)^{13}\equiv (-1)^{13}\equiv -1(\bmod 13)$

Ta có $2016=13.155+1\equiv 1(\bmod 13)\Rightarrow 2016^{2015}\equiv 1(\bmod 13)$

Do đó $B=(12!)^{13}+2016^{2015}\equiv 0(\bmod 13)$. Hay $B\vdots 13$

26.12. Chứng minh rằng với $n\in N$:

a) $2^{2^{2n+1}}+3.2^{3n}\vdots 7$. b) $2^{2^{4n+1}}+2.12^{5n+1}+5.10^{2n}\vdots 11$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Theo định lý Fermat bé, do 7 là số nguyên tố nên $2^6\equiv 1(\bmod 7)$

Ta có $4\equiv 1(\bmod 3)\Rightarrow 4^n\equiv 1(\bmod 3)\Rightarrow 2.4^n\equiv 2(\bmod 6)$.

Nghĩa là $2^{2n+1} = 2(2^2)^n = 2.4^n \equiv 2(\bmod 6) \Rightarrow 2^{2n+1} = 6k+2, (k \in N)$

Mặt khác $2^{3n} = (2^3)^n = 8^n \equiv 1(\bmod 7) \Rightarrow 3.2^{3n} \equiv 3(\bmod 7)$

Do đó $2^{2^{2n+1}} + 3.2^{3n} \equiv 2^{6k+2} + 3 \equiv 2^2(2^6)^k + 3 \equiv 2^2.1 + 3 \equiv 0(\bmod 7)$

b) Do 11 là số nguyên tố nên $2^{10} \equiv 1(\bmod 11)$

Ta có $16 \equiv 1(\bmod 5) \Rightarrow 16^n \equiv 1(\bmod 5) \Rightarrow 2.16^n \equiv 2(\bmod 10)$

Nghĩa là $2^{4n+1} = 2(2^4)^n = 2.16^n \equiv 2(\bmod 10) \Rightarrow 2^{4n+1} = 10k+2, (k \in N)$

Mặt khác $12 \equiv 1(\bmod 11) \Rightarrow 12^{5n+1} \equiv 1(\bmod 11)$

$\Rightarrow 2.12^{5n+1} \equiv 2(\bmod 11)$

Do $10^2 \equiv 1(\bmod 11) \Rightarrow 10^{2n} \equiv 1(\bmod 11) \Rightarrow 5.10^{2n} \equiv 5(\bmod 11)$

Vì thế $2^{2^{4n+1}} + 2.12^{5n+1} + 5.10^{2n} \equiv 2^{10k+2} + 2 + 5 \equiv 2^2 + 7 \equiv 0(\bmod 11)$

Dạng toán khác

26.13. a) Với giá trị nào của số tự nhiên n thì $3^n + 63$ chia hết cho 72.

b) Cho $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1.$ Tìm giá trị tự nhiên của n để $A \vdots 323$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có $72 = 8.9$ và $(8;9) = 1$

* $63 \equiv 0(\bmod 9)$; khi $n = 2$ thì $3^n \equiv 0(\bmod 9)$ do đó $3^n + 63 \equiv 0(\bmod 9)$

* Mặt khác, với $n = 2k(k \in N^*)$ thì $3^n - 1 = 3^{2k} - 1 = 9^k - 1 \equiv 1^k - 1 \equiv 0(\bmod 8)$

Do đó $3^n + 63 = 3^n - 1 + 64 \equiv 0(\bmod 8)$

Vậy với $n = 2k(k \in N^*)$ thì $3^n + 63 \vdots 72$

b) Ta có $323 = 17.19$ và $(17;19) = 1$

* $A = (20^n - 1) + (16^n - 3^n) = \text{P} + \text{Q}$

Ta có $20^n \equiv 1(\bmod 19) \Rightarrow P \equiv 0(\bmod 19)$

Nếu $n = 2k(k \in N^*)$ thì $Q = 16^{2k} - 3^{2k} \equiv (-3)^{2k} - 3^{2k} \equiv 3^{2k} - 3^{2k} \equiv 0(\bmod 19)$

$\Rightarrow A = P + Q \equiv 0(\bmod 19)$

* $A = (20^n - 3^n) + (16^n - 1) = P' + Q'$

$20^n \equiv 3^n(\bmod 17)$. Do đó $P' = 20^n - 3^n \equiv 0(\bmod 17)$

Nếu $n = 2k(k \in N^*)$ thì $Q' = 16^{2k} - 1 = (-1)^{2k} - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0(\bmod 17)$

$\Rightarrow A = P' + Q' \equiv 0(\bmod 17)$. Do $(17;19) = 1$ nên $A \equiv 0(\bmod 17.19)$

Vậy với $n = 2k(k \in N^*)$ thì $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1 \vdots 323$

26.14. Tìm các số nguyên tố p thỏa mãn $2^p + 1 \vdots p$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Theo định lý Fermat bé ta có $2^p \equiv 2(\bmod p)$ nên nếu $2^p \equiv -1(\bmod p)$ thì ta có $3 \equiv 0(\bmod p) \Rightarrow p = 3$

Mặt khác khi $p = 3$ thì $2^3 + 1 = 9 \equiv 0(\bmod 3)$. Vậy $p = 3$ là số cần tìm.

26.15. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $p^2 + 20$ là số nguyên tố.

Hướng dẫn giải – đáp số

Với $p = 3$ thì $p^2 + 20 = 29$ là số nguyên tố.

Với $p \neq 3$ thì $p^2 \equiv 1(\bmod 3)$ nên $p^2 + 20 \equiv 21 \equiv 0(\bmod 3)$

Vậy $p^2 + 20 \vdots 3$ mặt khác $p^2 + 20 > 3$ nên $p^2 + 20$ là hợp số. Vậy chỉ có 1 số nguyên tố cần tìm là $p = 3$.

26.16. Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng số $ab^p - ba^p \vdots p$ với mọi số nguyên dương a, b.

Hướng dẫn giải – đáp số

Với $a, b \in N^*$. Nếu $ab \vdots p$ thì số $ab^p - ba^p \vdots p$

Nếu $ab \not\vdots p$ thì $(a, p) = (b, p) = 1$.

Do đó $a^{p-1} \equiv b^{p-1} \equiv 1(\bmod \mathrm{p}) \Rightarrow \mathrm{a}^{p-1} - b^{p-1} \equiv 0(\bmod \mathrm{p}) \Rightarrow \mathrm{ab}(\mathrm{a}^{p-1} - b^{p-1}) \equiv 0(\bmod p)$

$\Rightarrow ab^p - ba^p \equiv 0(\bmod p)$ hay $ab^p - ba^p \vdots p, \forall a, b \in N^*$.

26.17. a) Chứng minh rằng tổng các bình phương của ba số nguyên trong phép chia cho 8 không thể có dư là 7.

b) Chứng minh phương trình $4x^2 + y^2 + 9z^2 = 2015$ không có nghiệm nguyên.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Giả sử $a, b, c \in Z$ mà $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 7(\bmod 8)$

Ta có $a \equiv 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; 4\ (\bmod 8) \Rightarrow \mathrm{a}^2 \equiv 0; 1; 4\,(\bmod 8)$

$\rightarrow b^2 + c^2 \equiv 7; 6; 3\,(\bmod 8)$. Điều này vô lý vì $b^2 \equiv 0; 1; 4\,(\bmod 8)$

Và $c^2 \equiv 0; 1; 4(\bmod 8) \Rightarrow b^2 + c^2 \equiv 0; 1; 2; 4; 5\,(\bmod 8)$

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 \not\equiv 7\,(\bmod 8)$

b) Áp dụng câu a) ta có với $x, y, z \in Z$

$4x^2 + y^2 + 9z^2 = (2x)^2 + y^2 + (3z)^2 \not\equiv 7(\bmod 8)$

Mà $2015 = 8.251 + 7 \equiv 7\,(\bmod 8)$

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

26.18. Tìm hai chữ số tận cùng của $2011^{2010^{2009}}$

(Đề thi Olympic Toán Singapore năm 2010)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $2011 \equiv 11(\bmod 100)$; $11^2 \equiv 21(\bmod 100)$; $11^3 \equiv 31(\bmod 100)$; $11^5 \equiv 21.31 \equiv 51(\bmod 100)$

$\Rightarrow 11^{10} \equiv 51^2 \equiv 1 (\bmod 100)$

Ta có $2010^{2009} \equiv 0 (\bmod 10) \Rightarrow 2010^{2009} = 10k (k \in Z)$

$\Rightarrow 2011^{2010^{2009}} = 2011^{10k} \equiv 11^{10k} \equiv (11^{10})^k \equiv 1 (\bmod 100)$. Do đó hai chữ số tận cùng là số 01.

26.19. Cho biểu thức $A = \left(a^{2012} + b^{2012} + c^{2012}\right) - \left(a^{2008} + b^{2008} + c^{2008}\right)$ với a, b, c là các số nguyên dương. Chứng minh rằng A chia hết cho 30.

(Đề thi chọn học sinh giỏi môn toán lớp 9 TP. Hà Nội, năm học 2011-2012)

Hướng dẫn giải – đáp số

Bài toán có nhiều cách giải. Sau đây là cách giải theo đồng dư thức:

* Ta có $\forall n \in N^*$ thì $n^5 - n \equiv 0 (\bmod 30)$ (ví dụ 8 chuyên đề 26 đã chứng minh)

$A = (a^{2012} - a^{2008}) + (b^{2012} - b^{2008}) + (c^{2012} - c^{2008})$
$A = a^{2007}(a^5 - a) + b^{2007}(b^5 - b) + c^{2007}(c^5 - c)$

Ta có $a^5 - a \equiv 0 (\bmod 30) \Rightarrow a^{2007}(a^5 - a) \equiv 0 (\bmod 30)$

Tương tự $b^{2007}(b^5 - b) \equiv 0 (\bmod 30); c^{2007}(c^5 - c) \equiv 0 (\bmod 30)$

Vậy $A \equiv 0 (\bmod 30)$. Hay $A \vdots 30$

26.20. Chứng minh rằng không tồn tại các bộ ba số nguyên (s; y; z) thỏa mãn đẳng thức $x^4 + y^4 = 7z^4 + 5$.

(Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, năm học 2011-2012)

Hướng dẫn giải – đáp số

Giả sử tồn tại bộ ba số nguyên (x; y; z) thỏa mãn $x^4 + y^4 = 7z^4 + 5$

$\Leftrightarrow x^4 + y^4 + z^4 = 8z^4 + 5 \quad (1)$

Xét với một số nguyên a bất kỳ thì nếu a chẵn thì $a = 2k (k \in Z) \Rightarrow a^4 = 16k^4 \equiv 0 (\bmod 8)$;

Nếu a lẻ thì $a^4 = (2k+1)^4 \equiv 1 (\bmod 8)$

Do đó $x^4 + y^4 + z^4 \equiv 0; 1; 2; 3 (\bmod 8)$. Trong khi đó $8z^4 + 5 \equiv 5 (\bmod 8)$ mâu thuẫn với (1). Vậy không tồn tại các bộ ba số nguyên (s; y; z) thỏa mãn đẳng thức $x^4 + y^4 = 7z^4 + 5$

26.21. Tìm hai chữ số cuối cùng của số $A = 41^{106} + 57^{2012}$.

(Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, năm học 2012-2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $41^2 = (40+1)^2 = 40^2 + 80 + 1 \equiv 81 (\bmod 100)$

$41^2 \equiv 81^2 \equiv 6561 \equiv 61 (\bmod 100) \Rightarrow 41^5 \equiv 61.41 \equiv 1 (\bmod 100)$

$\Rightarrow 41^{106} \equiv 41.(41^5)^{21} \equiv 41 \ (\bmod 100)$

Mặt khác $57^4 = 10556001 \equiv 1 (\bmod 100) \Rightarrow 57^{2012} = (57^4)^{503} \equiv 1 (\bmod 100)$

Vì thế $A \equiv 41 + 1 (\bmod 100)$

Do đó hai chữ số cuối cùng của số $A = 41^{106} + 57^{2012}$ là 42.

26.22. Cho a, b là hai số nguyên dương thỏa mãn $a+20$ và $b+13$ cùng chia hết cho 21. Tìm số dư trong phép chia $A = 4^a + 9^b + a + b$ cho 21.

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên Trần Phú – Hải Phòng, năm học 2013-2014)

Hướng dẫn giải – đáp số

Do $a+20 \vdots 21 \Rightarrow a \equiv 1 (\bmod 3)$ và $a \equiv 1 (\bmod 7)$

$b+13 \vdots 21 \Rightarrow b \equiv 2 (\bmod 3)$ và $b \equiv 2 (\bmod 7)$

Suy ra $A = 4^a + 9^b + a + b \equiv 1+0+1+2 \equiv 1 (\bmod 3) \Rightarrow A \equiv 10 (\bmod 3)$

Xét $a = 3k+1; b = 3q+2$ với $k, q \in N$ ta có $4^a = 4^{3k+1} = 4.64^k \equiv 4 (\bmod 7)$

$9^b = 9^{3q+2} \equiv 2^{3q+2} \equiv 4.8^q \equiv 4 (\bmod 7)$

Do đó $A = 4^a + 9^b + a + b \equiv 4+4+1+1 \equiv 10 (\bmod 7) \Rightarrow A \equiv 10 (\bmod 7)$

$A \equiv 10 (\bmod 3)$ và $A \equiv 10 (\bmod 7)$ mà $(3;7) = 1$ nên $A \equiv 10 (\bmod 3.7)$

Hay $A \equiv 10 (\bmod 21)$. Vậy số dư trong phép chia A cho 21 là 10.

26.23. Cho n là một số nguyên dương chứng minh $A = 2^{3n+1} + 2^{3n-1} + 1$ là hợp số.

(Đề thi học sinh giỏi lớp 9 TP. Hà Nội, năm học 2014-2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

$2^3 \equiv 1 (\bmod 7) \Rightarrow (2^3)^n \equiv 1 (\bmod 7) \Rightarrow 2^{3n+1} = 2.(2^3)^n \equiv 2 (\bmod 7)$

và $2^{3n-1} = 2^2.(2^3)^{n-1} \equiv 4 (\bmod 7)$

nên $A \equiv 2+4+1 \equiv 0 (\bmod 7)$ nghĩa là $A \vdots 7$. Mà với $n \in N^*$ thì A>7.

Vậy A là hợp số.

26.24. Chứng minh $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương n.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh, năm học 2015-2016)

Hướng dẫn giải – đáp số

$\forall n \in N^*$ ta có $2012^{4n} \equiv 0 (\bmod 2)$; $2013^{4n} \equiv 1 (\bmod 2)$;

$2014^{4n} \equiv 0 (\bmod 2); 2015^{4n} \equiv 1 (\bmod 2)$. Do đó $A \equiv 2 \equiv 0 (\bmod 2)$

* Ta lại có $2012 \equiv 0 (\bmod 4) \Rightarrow 2012^{4n} \equiv 0 (\bmod 4)$;

$2014 \equiv 2 (\bmod 4) \Rightarrow 2014^2 \equiv 2^2 \equiv 0 (\bmod 4) \Rightarrow 2014^{4n} \equiv (2014^2)^{2n} \equiv 0 (\bmod 4)$

Do $2013 \equiv 1 (\bmod 4) \Rightarrow 2013^{4n} \equiv 1 (\bmod 4)$;

Do $2015 \equiv -1 (\bmod 4) \Rightarrow 2015^{4n} = (-1)^{4n} \equiv 1 (\bmod 4)$

Vậy $A \equiv 2 \pmod 4$ nghĩa là A chia cho 4 dư 2. Ta có $A \vdots 2; A \not\vdots 2^2; 2$ là số nguyên tố. Vậy A không là số chính phương $\forall n \in N^*$.