MỘT SỐ KỸ THUẬT SỬ DỤNG
BẤT ĐẲNG THỨC AM - GM VÀ BẤT ĐẲNG THỨC BUNYAKOVSKI

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC THƯỜNG DÙNG

A. MỘT SỐ QUY TẮC CHUNG KHI SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC AM - GM VÀ BẤT ĐẲNG THỨC BUNYAKOVSKI

- **Quy tắc song hành**: Đa số các bất đẳng thức đều có tính đối xứng nên chúng ta có thể sử dụng nhiều bất đẳng thức trong chứng minh một bài toán để định hướng cách giải nhanh hơn.
- **Quy tắc dấu bằng:** Dấu "=" trong bất đẳng thức có vai trò rất quan trọng. Nó giúp ta kiểm tra tính đúng đắn của chứng minh, định hướng cho ta cách giải. Chính vì vậy khi giải các bài toán chứng minh bất đẳng thức hoặc các bài toán cực trị ta cần rèn luyện cho mình thói quen tìm điều kiện của dấu bằng mặc dù một số bài không yêu cầu trình bày phần này.
- **Quy tắc về tính đồng thời của dấu bằng:** Chúng ta thường mắc sai lầm về tính xảy ra đồng thời của dấu "=" khi áp dụng liên tiếp hoặc song hành nhiều bất đẳng thức. Khi áp dụng liên tiếp hoặc song hành nhiều bất đẳng thức thì các dấu "=" phải cùng được thỏa mãn với cùng một điều kiện của biến.
- **Quy tắc biên:** Đối với các bài toán cực trị có điều kiện ràng buộc thì cực trị thường đạt được tại vị trí biên.
- **Quy tắc đối xứng:** Các bất đẳng thức có tính đối xứng thì vai trò của các biến trong các bất đẳng thức là như nhau do đó dấu "=" thường xảy ra tại vị trí các biến đó bằng nhau. Nếu bài toán có điều kiện đối xứng thì chúng ta có thể chỉ ra dấu "="xảy ra tại khi các biến đó bằng nhau và bằng một giá trụ cụ thể.

I. MỘT SỐ KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC AM- GM

1. Kỹ thuật tách ghép bộ số

1.1 Kỹ thuật tách ghép cơ bản

Bài 1: Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng: $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ac} = 8abc$ (đpcm)

Bài 2: Cho 4 số thực dương a, b, c, d. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{ac}+\sqrt{bd} \leq \sqrt{(a+b)(c+d)}$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$\frac{\sqrt{ac}+\sqrt{bd}}{\sqrt{(a+b)(c+d)}} = \sqrt{\frac{a}{(a+b)}.\frac{c}{(c+d)}}+\sqrt{\frac{b}{(a+b)}.\frac{d}{(c+d)}}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b}+\frac{d}{c+d}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{a+b}+\frac{c+d}{c+d}\right) = 1$$

$\Rightarrow \sqrt{ac}+\sqrt{bd} \leq \sqrt{(a+b)(c+d)}$ (đpcm)

Bài 3: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $\begin{cases} a > c \\ b > c \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$\frac{\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}}{\sqrt{ab}} = \sqrt{\frac{c}{b}.\frac{(a-c)}{a}}+\sqrt{\frac{c}{a}.\frac{(b-c)}{b}}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b}+\frac{a-c}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}+\frac{b-c}{b}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b}+1-\frac{c}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}+1-\frac{c}{b}\right) = 1$$

$\Rightarrow \sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$ (đpcm)

Bài 4: Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$1+\sqrt[3]{abc} \le \sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$\frac{1+\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}} \le \sqrt[3]{\frac{1}{(1+a)}.\frac{1}{(1+b)}.\frac{1}{(1+c)}}+\sqrt[3]{\frac{a}{(1+a)}.\frac{b}{(1+b)}.\frac{c}{(1+c)}}$$

$$\le \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}\right)$$

$$\le \frac{1}{3}\left(\frac{1+a}{1+a}+\frac{1+b}{1+b}+\frac{1+c}{1+c}\right)=1$$

$\Rightarrow 1+\sqrt[3]{abc} \le \sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}$ (đpcm)

Bài 5: Cho 2 số thực dương a, b thỏa $\begin{cases} a \ge 1 \\ b \ge 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1} \le ab$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$a\sqrt{b-1}=\sqrt{a}\sqrt{ab-a} \le \frac{1}{2}(a+ab-a)=\frac{ab}{2}$ **(1)**

Tương tự: $b\sqrt{a-1} \le \frac{ab}{2}$ **(2)**

Cộng theo vế **(1)** và **(2)**, ta được:

$a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1} \le ab$ (đpcm)

Bài 6: Cho 2 số thực dương a, b. Chứng minh rằng: $16ab(a-b)^2 \le (a+b)^4$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$16ab(a-b)^2 = 4.(4ab)(a-b)^2 \le 4.\left[\frac{4ab+(a-b)^2}{2}\right]^2 = 4.\left[\frac{(a+b)^2}{2}\right]^2 = (a+b)^4$ (đpcm)

Bài 7: Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$a(1+b)+b(1+c)+c(1+a) \ge 3\sqrt[3]{abc}\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)$$

Giải:

Ta có:

$a(1+b)+b(1+c)+c(1+a)=(a+b+c)+(ab+bc+ca)$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$

$ab+bc+ca \ge 3\sqrt[3]{(abc)^2}$

$\Rightarrow (a+b+c)+(ab+bc+ca) \ge 3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{(abc)^2} = 3\sqrt[3]{abc}\left(1+3\sqrt[3]{abc}\right)$

$\Rightarrow a(1+b)+b(1+c)+c(1+a) \ge 3\sqrt[3]{abc}\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)$ (đpcm)

<u>Bài 8:</u> Cho 2 số thực dương a, b. Chứng minh rằng: $ab+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} \ge a+b+1$

<u>Giải:</u>

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$ab+\frac{a}{b}+\frac{b}{a} = \left(\frac{ab}{2}+\frac{a}{2b}\right)+\left(\frac{ab}{2}+\frac{b}{2a}\right)+\left(\frac{a}{2b}+\frac{b}{2a}\right)$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{ab}{2}.\frac{a}{2b}}+2\sqrt{\frac{ab}{2}.\frac{b}{2a}}+2\sqrt{\frac{a}{2b}.\frac{b}{2a}} = a+b+1 \quad \text{(đpcm)}$$

<u>Bài 9:</u> Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a+b+c=10$. Tìm GTLN của: $A=a^2b^3c^5$

<u>Giải:</u>

Ta có:

$$10 = a+b+c = \frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{b}{3}+\frac{b}{3}+\frac{c}{5}+\frac{c}{5}+\frac{c}{5}+\frac{c}{5}+\frac{c}{5} \ge 10\sqrt[10]{\left(\frac{a}{2}\right)^2.\left(\frac{b}{3}\right)^3.\left(\frac{c}{5}\right)^5}$$

$$\Rightarrow \sqrt[10]{\left(\frac{a}{2}\right)^2.\left(\frac{b}{3}\right)^3.\left(\frac{c}{5}\right)^5} \le 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2.\left(\frac{b}{3}\right)^3.\left(\frac{c}{5}\right)^5 \le 1 \Rightarrow a^2b^3c^5 \le 2^2 3^3 5^5 = 337500$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{3}=\dfrac{c}{5} \\ a+b+c=10 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{3}=\dfrac{c}{5}=\dfrac{a+b+c}{10}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ c=5 \end{cases}$

Vậy GTLN của A là 337500.

1.2 Kỹ thuật tách nghịch đảo

Bài 1: Chứng minh rằng: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$, $\forall a,b>0$

Giải:

Vì $a,b>0$ nên $\frac{a}{b}>0$, $\frac{b}{a}>0$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}}=2$ (đpcm)

Bài 2: Chứng minh rằng: $a+\frac{1}{a-1}\ge 3$, $\forall a>1$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$a+\frac{1}{a-1}=a-1+\frac{1}{a-1}+1\ge 2\sqrt{(a-1)\frac{1}{a-1}}+1=2+1=3$ (đpcm)

Bài 3: Chứng minh rằng: $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}\ge 2$, $\forall a\in \boldsymbol{R}$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{a^2+1+1}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{a^2+1}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\ge 2\sqrt{\sqrt{a^2+1}\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}}=2$ (đpcm)

Bài 4: Chứng minh rằng: $\frac{3a^2}{1+9a^4}\le\frac{1}{2}, \forall a\ne 0$

Giải:

Với $\forall a\ne 0$, áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$\frac{3a^2}{1+9a^4}=\frac{1}{\frac{1}{3a^2}+\frac{9a^4}{3a^2}}=\frac{1}{\frac{1}{3a^2}+3a^2}\le\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3a^2}.3a^2}}=\frac{1}{2}$ (đpcm)

Bài 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=(a+1)^2+\left(\frac{a^2}{a+1}+2\right)^2$, $\forall a\ne -1$

Giải: