Chuyên đề: BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI

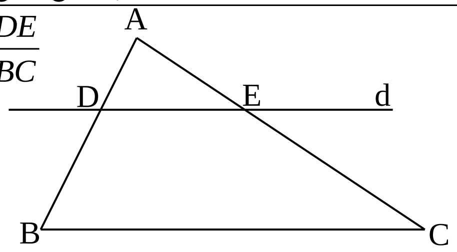
PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG (HÌNH HỌC OXY)

CHỦ ĐỀ 2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

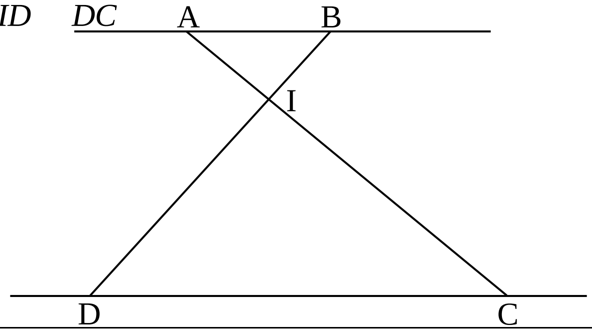
Phần 1. CÁC TÍNH CHẤT – ĐỊNH LÝ TIÊU BIỂU TRONG HÌNH HỌC PHẲNG

1. Định lý Thales thuận:
Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của một tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Trường hợp 1: $DE//BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$



Trường hợp 2: $AB//DC \Rightarrow \frac{IA}{IC} = \frac{IB}{ID} = \frac{AB}{DC}$

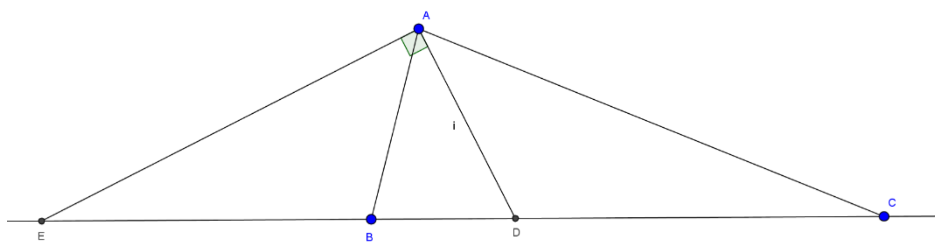


2. Định lý Thales đảo:
Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tường ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

3. Đường phân giác trong của tam giác:
Trong một tam giác, đường phân giác trong của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn đó.

* Xét tam giác ABC có AD là đường phân giác trong góc A.

Ta có: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{AB}{AC}.\overrightarrow{DC}$



* Xét tam giác ABC có AE là đường phân giác ngoài góc A.

Ta có: $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \overrightarrow{EB} = \frac{AB}{AC}.\overrightarrow{EC}$

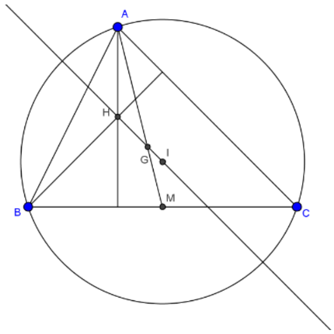
* **Chú ý:** $AD \perp AE$

4.

5. Tính chất về đường thẳng EULER:

Tính chất 4.1. Trong một tam giác thì trọng tâm, trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp cùng nằm trên một đường thẳng. *(Đường thẳng này gọi là đường EULER của tam giác)*

Chứng minh:



Cho tam giác ABC, gọi G, H, I lần lượt là trọng tâm, trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp.

Gọi D là điểm đối xứng của A của I.

Khi đó tứ giác $BHCD$ là hình bình hành, suy ra trung điểm M của BC cũng là trung điểm của HD.

$\Rightarrow IM = \frac{1}{2}AH$ (tính chất đường trung bình của tam giác AHD)

$$\Rightarrow \frac{GM}{GA} = \frac{IM}{AH} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta AHG \sim \Delta MIG \Rightarrow \text{ba điểm } H, G, I \text{ thẳng hàng và } GH = 2GI.$$

Tính chất 4.2. Từ **Tính chất 4.1.** ta có các tính chất sau:

a) Tứ giác $BHCD$ là hình bình hành.

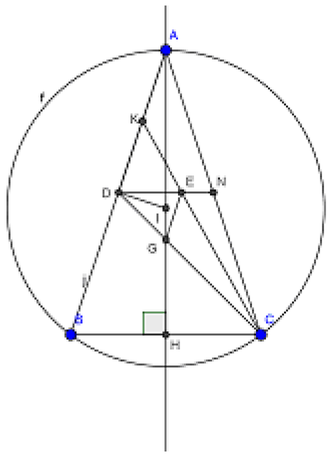
b) $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM}$

c) $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GI}$

6. Các tính chất đặc biệt trong tam giác – đường tròn:

Tính chất 5.1. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn tâm I, G là trọng tâm tam giác ABC. Gọi D là trung điểm của AB, E là trọng tâm tam giác ACD. Khi đó: I là trực tâm tam giác DEG và $IE \perp DG$.

Chứng minh:



Gọi N, H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BC và AD. E là giao điểm của KC và DN.

Ta có: G là trọng tâm tam giác ABC

$$\Rightarrow \frac{CG}{CD} = \frac{CE}{CK} = \frac{2}{3} \Rightarrow GE // AB$$

Lại có: I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $DI \perp AB$

$\Rightarrow DI \perp GE$

Măt khác: $DE // BC \Rightarrow GI \perp DE$

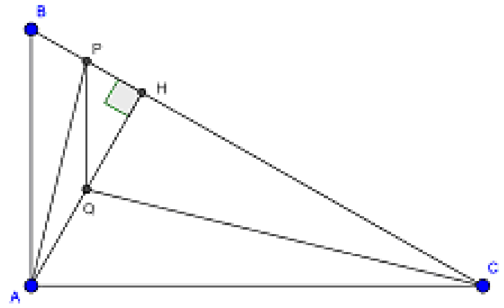
Do đó: I là trực tâm tam giác DGE

Từ đó ta được: $EI \perp DG$.

Tính chất 5.2. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BH và AH. Chứng minh rằng Q là trực tâm tam giác ACP và $AP \perp CQ$.

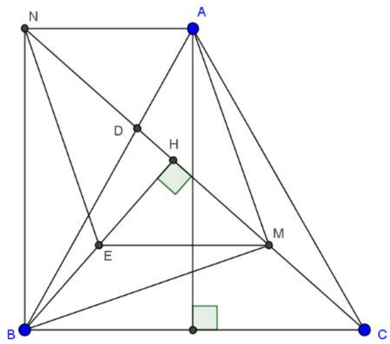
Chứng minh:

Do P, Q là trung điểm của BH và AH
nên $PQ // AB$. Mà: $AB \perp AC$
$\Rightarrow PQ \perp AC$
Mặt khác: $AH \perp PC$
Do đó: H là trực tâm tam giác ACP
và $AP \perp CQ$.



Tính chất 5.3.
Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi D là điểm nằm trên cạnh AB sao cho $AB = 3AD$ và H là hình chiếu vuông góc của B trên CD, M là trung điểm của HC.
Chứng minh rằng: $AM \perp BM$.

Chứng minh:

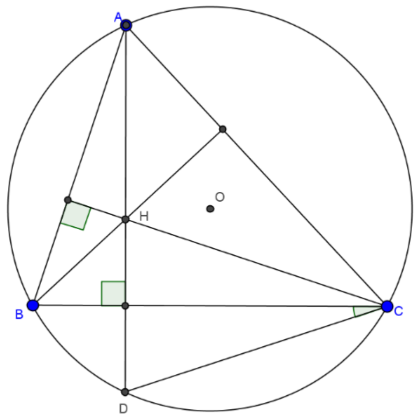


Dựng đường thẳng d qua B và vuông góc với BC.
Gọi $N = CD \cap d$. Gọi E là trung điểm của BH.
Ta chứng minh được: tứ giác $ANEM$ là hình bình hành
$\Rightarrow NE // AM$
và chứng minh được E là trực tâm tam giác BMN.
Từ đó cho ta: $NE \perp MB \Rightarrow MB \perp AM$.

Tính chất 5.4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), có H là trực tâm. Gọi D là giao điểm thứ hai của AH với (O). Chứng minh: H và D đối xứng nhau qua BC.

Chứng minh:

Ta có: $\widehat{BAH} = \widehat{BCH}$ (cùng phụ với góc $\widehat{ABC}$)
Lại có: $\widehat{BAH} = \widehat{BCD}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BD)
$\Rightarrow \widehat{BCH} = \widehat{BCD}$
$\Rightarrow$ tam giác CHD cân tại C
$\Rightarrow BC$ là đường trung trực của HD
Do đó: H và D đối xứng nhau qua BC.



Tính chất 5.5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I, có BE và CF là hai đường cao. Chứng minh: $IA \perp EF$.

Chứng minh:

Cách 1.

Ta có: tứ giác $BFEC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AEF}$ (cùng bù với góc FEC)

Gọi D là giao điểm thứ hai của AI và (I)

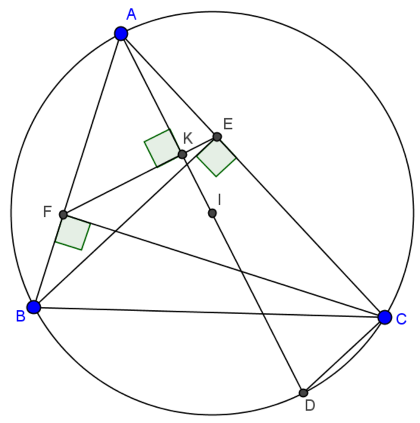
Khi đó: $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

$\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ADC}$

Mặt khác: $\widehat{ADC} + \widehat{DAC} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{AEF} + \widehat{DAC} = 90^0$

Do đó: $\widehat{AKE} = 90^0$ hay $AI \perp EF$.



Cách 2.

Kẻ tiếp tuyến d của đường tròn tại A, gọi là Ax.

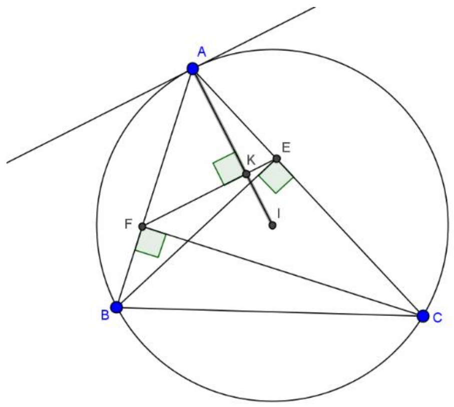
Ta có: $\widehat{xAB} = \widehat{ACB}$ (góc nội tiếp và góc giữa tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AB)

Lại có: Tứ giác $BFEC$ nội tiếp $\Rightarrow$ $\widehat{ACB} = \widehat{AFE}$

Do đó: $\widehat{xAB} = \widehat{AFE}$ (theo vị trí so le trong)$\Rightarrow$ $Ax // EF$

Mà: $Ax \perp AI$.

Do đó: $EF \perp AI$.



Tính chất 5.6. Cho tam giác ABC. Gọi I và J lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Gọi D là giao điểm thứ hai của AI và (I). Chứng minh rằng: D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác JBC.

Chứng minh:

Ta có: $\widehat{J_1} = \widehat{A_1} + \widehat{B_1}$ (cùng bù với góc $\widehat{AJB}$)

Mà: $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ (dó BJ là phân giác trong góc B)

$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (dó BJ là phân giác trong góc A)

$\widehat{A_2} = \widehat{B_3}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung CD)

$\Rightarrow \widehat{J_1} = \widehat{B_2} + \widehat{B_3} = \widehat{JBD}$

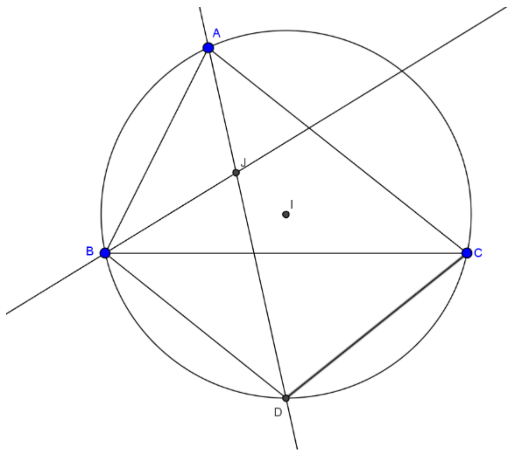
Suy ra: Tam giác BDJ cân tại $D \Rightarrow BD = DJ$ (1)

Mặt khác: Do AI là phân giác trong góc $A \Rightarrow D$ là điểm chính giữa cung nhỏ BC

$\Rightarrow DB = DC$ (2)

Từ (1) và (2) cho ta: $DB = DJ = DC$

$\Rightarrow D$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác JBC.



Tính chất 5.7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) tâm I có AD là đường phân giác trong góc A. Gọi d là tiếp tuyến tại A của (C). d cắt BC tại E.

Chứng minh rằng: tam giác AED cân tại E.